Zahlentheorie II (Analytische Zahlentheorie), Blatt 2

hhu Düsseldorf
SoSe 2023

Abgabe: bis Montag 17.4.2023, vor der Vorlesung

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/zt2/`

Aufgabe 1 (5 Punkte): Einfache Anwendung der Perronschen Formel

Zeigen Sie: Falls $c, x > 1$ und x keine ganze Zahl ist, gilt

(a)

$$\psi(x) = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} \, \mathrm{d}s,$$

(b)

$$\sum_{n\le x} \mu(n) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} \, \mathrm{d}s,$$

(c)

$$\sum_{n\le x} \mu^2(n) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} \frac{x^s}{s} \, \mathrm{d}s.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte): Detail zur Perronschen Formel

Zeigen Sie, dass für $c > 0$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} y^s \frac{\mathrm{d}s}{s} = \begin{cases} 1 + \mathrm{O}(y^c/T), & \text{falls } y \ge 2, \\ 1 + \frac{1}{\pi}\operatorname{si}(T\log(y)) + \mathrm{O}(2^c/T), & \text{falls } 1 \le y \le 2, \\ -\frac{1}{\pi}\operatorname{si}(T\log(1/y)) + \mathrm{O}(2^c/T), & \text{falls } 1/2 \le y \le 1, \\ \mathrm{O}(y^c/T), & \text{falls } 0 < y \le 1/2. \end{cases}$$

Dabei ist

$$\operatorname{si}(x) = -\int_x^\infty \frac{\sin(u)}{u} \, \mathrm{d}u$$

der (spezielle) Integralsinus.