Zahlentheorie II (Analytische Zahlentheorie), Blatt 11

hhu Düsseldorf
SoSe 2023

Abgabe: bis Montag 3.7.2023, vor der Vorlesung

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/zt2/`

Aufgabe 1 (7 Punkte): Zur Große-Sieb-Ungleichung

Seien $Q \geq 1$, $x > 1$ reell, und $\psi(x, \chi) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)\chi(n)$.

(a) Zeigen Sie mit der Große-Sieb-Ungleichung für Charaktere, dass

$$\sum_{q \leq Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi(q)} |\psi(x, \chi)|^2 \ll (x + Q^2)x \log(x).$$

Dabei durchläuft χ in der Summe alle primitiven Charaktere mod q.

(b) Sei $X(Q) = \{(q, \chi);\ q \leq Q,\ \chi(q) \text{ primitiv}\}$. Zeigen Sie $\#X(Q) \gg \dfrac{Q^2}{(\log\log(Q))^2}$.

Hinweis: Bl7 A3 und $\varphi(q) \gg q(\log\log(q))^{-1}$.

(c) Sei $\delta > 0$ fest, $A > 0$ und E_δ die Menge der $(q, \chi) \in X(Q)$, für die $|\psi(x, \chi)| > x^{1/2}(\log(x))^{A+1/2+\delta}$ gilt. Schließen Sie, dass für $x^{1/2}\log^{-A}(x) \leq Q \leq x$, $x \to \infty$, gilt:

$$\frac{\#E_\delta}{\#X(Q)} \ll \frac{1}{\log^\delta(x)} \to 0.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte): Brun-Titchmarsh

Zeigen Sie die Abschätzung

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a(q)}} \frac{1}{p} \ll \frac{1}{p_{a,q}} + \mathrm{O}\left(\frac{\log\log(x)}{\varphi(q)}\right)$$

gleichmäßig für $x \geq e^e$ und $1 \leq a < q$ mit $(a, q) = 1$, wobei $p_{a,q}$ die kleinste Primzahl kongruent zu a mod q bezeichne, und wobei die implizite Konstante absolut ist.
Hinweis: Betrachten Sie $q \leq 3$ und $3 \leq x \leq 3q$ (direkt) und $3q < x$ (mit B-T/p$\sum$) separat.

Aufgabe 3 (3 Punkte): Bombieri–Vinogradov

Sei $B > 2$ hinreichend groß, $Q = \sqrt{x}(\log(x))^{-2A-6}$, und sei $E(x; q, a) := \psi(x, q, a) - x/\varphi(q)$.

Zeigen Sie: Es gilt $E(x; q, a) \ll \dfrac{x}{\varphi(q)} \log^{-A}(x)$ gleichmäßig in a, q mit $q \leq Q$ und $(a, q) = 1$, mit höchstens $Q\log^{-A}(x)$ vielen Ausnahmen für $q \leq Q$.

Inwiefern kann der Satz von Bombieri–Vinogradov in manchen Anwendungen die Annahme der Verallgemeinerten Riemannschen Vermutung ersetzen?