Zahlentheorie II (Analytische Zahlentheorie), Blatt 1

hhu Düsseldorf
SoSe 2023

Abgabe: bis Mittwoch 12.4.2023, vor der Vorlesung

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/zt2/`

Aufgabe 1 (5 Punkte): Wiederholung des Eulerproduktsatzes (AnZ8)

Gegeben sei die Teileranzahlfunktion $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ und der quadratfreie Kern $\gamma(n) = \prod_{p|n} p$.

(a) Zeigen Sie, dass τ und γ multiplikative Funktionen sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$G(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\tau(n)^s \gamma(n)^s}$$

für $\sigma > 1$ absolut konvergiert und die Eulerproduktdarstellung

$$G(s) = \prod_p \left(1 + \frac{\zeta(s) - 1}{p^s}\right)$$

hat.

Aufgabe 2 (8 Punkte): Wiederholung der Mertenssätze (AnZ21)

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $\delta > 0$ die Reihe $\displaystyle\sum_p \frac{1}{p \log^\delta(p)}$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie $\displaystyle\sum_{p\leq x} \frac{1}{p \log\log(p)} = \log\log\log(x) + \mathrm{O}(1)$.

Aufgabe 3 (2 Punkte): Logarithmische Ableitung von ζ

Zeigen Sie, dass für $1 < \sigma \leq 2$ die Abschätzung

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \ll \frac{1}{\sigma - 1}$$

gilt.