

Abgabe: bis Mittwoch 2.6.2021, 12:10 Uhr

Vorlesungswebseite: <http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/algebra/>

Die folgenden vier Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

Vereinbarung: Auf diesem Übungsblatt seien alle Ringe kommutativ mit 1!

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Es sei $\varphi : R \rightarrow S$ ein Ringhomomorphismus.

- (i) Zeigen Sie, dass $\varphi(R^\times) \subseteq S^\times$.
- (ii) Gilt $\varphi(R^\times) = S^\times$, falls φ surjektiv?
- (iii) Für $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \mid n$ sei $\pi : \mathbb{Z}/(n) \rightarrow \mathbb{Z}/(m)$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, dass $\pi((\mathbb{Z}/(n))^\times) = (\mathbb{Z}/(m))^\times$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Es sei R ein Ring. Die Teilmenge $\sqrt{0} := \{r \in R; \exists n \in \mathbb{N} : r^n = 0\}$ der nilpotenten Elemente (vgl. Aufgabe 3 auf Blatt 6) heißt das Nilradikal von R . Zeigen Sie:

- (i) $\sqrt{0}$ ist ein Ideal von R .
- (ii) Für $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ und $R = \mathbb{Z}/(m)$ gilt: $\sqrt{0} \neq 0 \iff \exists p \text{ prim: } p^2 \mid m$.
Was gilt für $m = 0$?
- (iii) $R/\sqrt{0}$ enthält keine nilpotenten Elemente $\neq 0$.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Bestimmen Sie die letzten beiden Ziffern der Dezimaldarstellung von 17^{362} .

Hinweis: Ermitteln Sie zuerst die Ordnung von $17 \in (\mathbb{Z}/(100))^\times$ unter Verwendung des CRS. Vergessen Sie nicht Blatt 1 Aufgabe 1.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Es sei R ein Ring derart, dass es zu jedem $r \in R$ ein $n_r > 1$ mit $r^{n_r} = r$ gibt. Zeigen Sie, dass dann jedes Primideal in R maximal ist.

Bitte wenden

Zahlentheoretische Textaufgabe: (nur mündlich, ohne Abgabe)

Ein Ei wiegt 55 g, ein Esslöffel Mehl 10 g, ein Esslöffel Zucker und Butter je 15 g. Es soll ein Rührteig hergestellt werden, der aus gleichen Teilen Eier, Mehl, Zucker und Butter besteht. Es ist noch ein Eigelb (20 g) und ein halbes Päckchen Backpulver übrig, die mitverwendet werden sollen; ein Päckchen Backpulver reicht für 500 g Mehl. Wie lässt sich mit diesen Angaben ein Rührteig abmessen? Dabei sind nur ganzzahlig viele zusätzliche Eier, ganze zusätzliche Backpulverpäckchen und ganzzahlig viele Esslöffel Mehl, Zucker und Butter erlaubt. Eine Kuchenform fasst gut 1.5 kg Teig. Wieviele Kuchen lassen sich aus dem Rührteig backen?