Algebra – Blatt 6

hhu Düsseldorf
SoSe 2021

Abgabe: bis Mittwoch 26.5.2021, 12:10 Uhr

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/algebra/`
Die folgenden vier Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Es sei R ein Ring mit 1. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $R^{n\times n}$ den Ring der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in R. Zeigen Sie:

(i) $r := \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix};\ a, b \in R\}$ ist ein Rechtsideal und $\ell := \{\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix};\ c, d \in R\}$ ist ein Linksideal in $R^{2\times 2}$. Sind diese Mengen Ideale?

(ii) Die Matrizen $E_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $E_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sind Nullteiler, aber $E_1 + E_2$ nicht.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

(i) Sei A eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{End}(A)$ aller Endomorphismen von A ein Ring ist (mit der Komposition als Multiplikation).

(ii) Sei A zyklische Gruppe der Ordnung n. Zeigen Sie $\mathrm{End}(A) \cong \mathbb{Z}/(n)$ und $\mathrm{Aut}(A) \cong (\mathbb{Z}/(n))^\times$ (d. h. man hat Ringisomorphien).

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Ein Element a eines Rings R heißt <u>nilpotent</u>, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a^n = 0$.
Bestimmen Sie die Einheitengruppe sowie die nilpotenten Elemente in folgenden Ringen.

(i) $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n) := \{f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n;\ f \text{ Vektorraumhomomorphismus}\}$,

(ii) $R_1 \times \cdots \times R_m$, wobei die R_i kommutative Ringe mit 1 sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Sei R ein kommutativer Ring mit $1, u \in R^\times$ und sei $a \in R$ nilpotent. Zeigen Sie, dass $u+a \in R^\times$.

Hinweis: Geometrische Summenformel

Bitte wenden

Wissensfragen zu A11 und A12: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Welche Teilmengen eines Ringes nennt man Ideale?

2.) Mit welchen Kriterien kann man überprüfen, dass ein Ideal mit dem umgebenden Ring übereinstimmt?

3.) Welche Ideale hat ein Körper?

4.) Warum ist es sinnvoll, Faktorringe mit Idealen (anstelle mit Unterringen) zu definieren?

5.) Was genau ist ein Unterring?

6.) Wie definiert man einen Ringhomomorphismus?

7.) Warum sind Urbilder von Idealen unter Ringhomomorphismen wieder Ideale?

8.) Warum besteht das Bild der Einheitengruppe aus lauter Einheiten?

9.) Wie lautet der Homomorphiesatz für Ringe? Unterscheidet sich dieser Satz wesentlich von dem für Gruppen?

10.) Gibt es einen zweiten Isomorphiesatz für Ringe?

11.) Werden bei der Projektion auf einen Faktorring auch Ideale auf Ideale abgebildet (mit einer Bijektion)? Kann man damit sagen, dass die Ideale im Faktorring genau den Idealen im ursprünglichen Ring entsprechen?

12.) Was nennt man den Primring eines Rings?

13.) Was ist die Charakteristik eines Rings, und warum ist diese stets endlich?

14.) Wie lautet der chinesische Restsatz in der Version für kommutative Ringe?

15.) Wann nennt man zwei Ideale coprim?

16.) Welche Situation des chinesischen Restsatzes ergibt sich für den Ring $\mathbb{Z}$?

17.) Wie löst man mit dem chinesischen Restsatz für $\mathbb{Z}$ ein System simultaner Kongruenzen zu paarweise teilerfremden Moduln?

18.) Gilt der chinesische Restsatz für $\mathbb{Z}$ noch, wenn teilerfremde, aber nicht paarweise teilerfremde Moduln betrachtet werden?

19.) Wie ist die Eulersche φ-Funktion definiert?

20.) Wie berechnet man $\varphi(r)$ in Abhängigkeit der Primfaktorzerlegung von r?

21.) Wie ist das von einer Teilmenge S eines Rings R erzeugte Ideal (S) definiert?

22.) Welche Ideale in einem kommutativen Ring werden Hauptideale genannt?

23.) Wann heißt ein Ideal maximal?

24.) Wie kann man ein maximales Ideal anhand des Faktorringes erkennen?

25.) Welche Ideale in einem kommutativen Ring werden prim, d. h. Primideale, genannt?

26.) Wie kann man ein Primideal anhand des Faktorringes erkennen?

27.) Sind maximale Ideale prim? Gilt dies umgekehrt?

28.) Was für einen Körper nennt man einen Quotientenkörper eines Integritätsbereiches? Ist dieser Quotientenkörper eindeutig bestimmt?

29.) Was ist der Quotientenkörper von $\mathbb{Z}$?

30.) Was ist der Quotientenkörper des Polynomrings $K[X]$, wobei K ein Körper ist?