

Abgabe: bis Mittwoch 19.5.2021, 12:10 Uhr

Vorlesungswebseite: <http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/algebra/>

Die folgenden vier Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Seien $0 < p < q$ Primzahlen und G eine Gruppe der Ordnung pq . Zeigen Sie:

- (i) G ist auflösbar.
- (ii) Ist p kein Teiler von $q - 1$, so ist G zyklisch.
- (iii) Es gibt genau eine Gruppe der Ordnung 15.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Bestimmen Sie sämtliche p -Sylowgruppen von S_4 .

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei p eine positive Primzahl, K ein endlicher Körper mit p Elementen.

- (i) Bestimmen Sie die Ordnung der endlichen Gruppe $GL(n, K)$.

Anleitung: Sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum und v_1, \dots, v_n eine Basis von V . Man zähle die Automorphismen f von V so: $f(v_1)$ kann in $V \setminus \{0\}$ gewählt werden, dann $f(v_2)$ in $V \setminus K \cdot f(v_1)$, ... usw.

- (ii) Zeigen Sie, dass die oberen Dreiecksmatrizen mit lauter Einsen auf der Diagonalen eine p -Sylowgruppe von $GL(n, K)$ bilden.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Es sei p prim, G eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung p^3 mit Zentrum Z . Zeigen Sie:

- (i) $Z \cong C_p$,
- (ii) $G/Z \cong C_p \times C_p$,

wobei mit C_r die zyklische Gruppe der Ordnung r bezeichnet sei.

Bitte wenden

Wissensfragen zu A9 und A10: (nur mündlich, ohne Abgabe)

- 1.) Welche Untergruppe einer Gruppe G nennt man den Normalisator von G , wenn H eine gegebene Untergruppe von G ist?
 - 2.) Welche Eigenschaft hat der Normalisator?
 - 3.) Welche Gruppen heißen p -Gruppen?
 - 4.) Welche Untergruppen einer endlichen Gruppe G nennt man p -Sylowgruppen?
 - 5.) Gibt es zu jeder Primzahl p immer eine p -Sylowgruppe? Auch, wenn p nicht die Gruppenordnung der umgebenden Gruppe teilt?
 - 6.) Wie stehen zwei verschiedene p -Sylowgruppen miteinander in Beziehung?
 - 7.) Was gilt für die Anzahl der p -Sylowgruppen im Vergleich mit der Gruppenordnung der umgebenden Gruppen?
 - 8.) Ist jede p -Untergruppe in einer p -Sylowgruppe enthalten?
 - 9.) Warum ist der Satz von Sylow klar im Fall einer endlichen abelschen Gruppe?
 - 10.) Welche Ringelemente nennt man die Einheiten des Rings?
 - 11.) Warum bildet die Menge der Einheiten im Ring eine Gruppe?
 - 12.) Welche Ringelemente nennt man Nullteiler?
-

Zum Selbststudium: Finden Sie noch mehr **Beispiele**, z.B.

- 1.) für den Normalisator einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n ,
 - 2.) für p -Sylowgruppen in einer Gruppe mit 20 Elementen,
 - 3.) für verschiedene p -Sylowgruppen in einer endlichen Gruppe (abelsch/nichtabelsch),
 - 4.) für eine eindeutig bestimmte p -Sylowgruppe in einer endlichen Gruppe (abelsch/nichtabelsch),
 - 5.) einen nichtkommutativen Ring mit Nullteilern,
 - 6.) einen kommutativen Ring, der kein Integritätsbereich ist,
 - 7.) ein Schiefkörper, der kein Körper ist.
-

Eine Anwendung: Bei einem bekannten Spiel sind 15 nummerierte Plättchen und eine Lücke auf einem quadratischen Brett verteilt:

Position A:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Position B:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Ist die Position B aus der Position A durch Verschieben der Plättchen erreichbar? Man betrachte das Signum der erreichbaren Positionen.