Algebra – Blatt 4

hhu Düsseldorf
SoSe 2021

Abgabe: bis Mittwoch 12.5.2021, 12:10 Uhr

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/algebra/`
Die folgenden vier Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Seien B, C Untergruppen der abelschen Gruppe A. Zeigen Sie

(i) $(B + C)/C \cong B/B \cap C$

(ii) Sei $A = B \oplus C$. Dann ist $A/C \cong B$, und A ist endlich erzeugt genau dann, wenn B und C beide endlich erzeugt sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Wieviele abelsche Gruppen (bis auf Isomorphie) der Ordnung 720 gibt es?
Bestimmen Sie Repräsentanten für deren Isomorphieklassen.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

(i) Sei $(B_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untergruppen der abelschen Gruppe A. Zeigen Sie, dass $A = \bigoplus_{i\in I} B_i$ genau dann gilt, wenn sich jedes a eindeutig in der Form $a = b_{i_1} + \cdots + b_{i_n}$ mit $n \in \mathbb{N}$, die $i_1, \ldots, i_n \in I$ paarweise verschieden, $b_{i_\nu} \in B_{i_\nu}$ darstellen lässt.

(ii) Seien $B_1, \ldots, B_n$ Untergruppen der abelschen Gruppe A. Zeigen Sie, dass $A = \bigoplus_{i=1}^n B_i$ genau dann gilt, wenn die Abbildung $\prod_{i=1}^n B_i \to A$, $(b_1, \ldots, b_n) \mapsto b_1 + \cdots + b_n$, ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Eine abelsche Gruppe heißt unzerlegbar, wenn sie nicht direkte Summe von zwei Untergruppen $\neq 0$ ist. Zeigen Sie:

(i) Die Gruppen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$, wenn $p \in \mathbb{N}$ prim und $k \in \mathbb{N}$ ist, sind unzerlegbar.

(ii) Die Gruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist eine Torsionsgruppe.

Bitte wenden

Wissensfragen zu A7 und A8: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Was ist eine Torsionsgruppe?

2.) Was bezeichnet man als den p-Torsionsteil einer abelschen Gruppe?

3.) Warum sind endlich erzeugte abelsche Torsionsgruppen endlich?

4.) Welche Gruppen werden als p-Gruppen bezeichnet?

5.) Warum ist jede abelsche Torsionsgruppe die direkte Summe ihrer p-Teile?

6.) Wie kann jede endliche abelsche p-Gruppe als direkte Summe zyklischer p-Gruppen geschrieben werden? Ist die Zerlegung eindeutig?

7.) Wie lautet der Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen?

8.) Kann man mit dem Hauptsatz alle Gruppen der Ordnung 8 bestimmen?

9.) Was nennt man eine Normalreihe einer Gruppe? Welche Gruppen dabei heißen Faktorgruppen?

10.) Wann nennt man eine Gruppe auflösbar?

11.) Welche auflösbaren Gruppen kennen Sie?

12.) Welche nicht auflösbaren Gruppen kennen Sie?

13.) Sind Untergruppen auflösbarer Gruppen wieder auflösbar?

14.) Was lässt sich über die Faktorgruppe modulo eines Normalteilers sagen, wenn die Ausgangsgruppe auflösbar ist?

15.) Welche der symmetrischen Gruppen S_n sind auflösbar?

16.) Sind p-Gruppen immer auflösbar?

17.) Jede endliche auflösbare Gruppe besitzt eine besondere Normalreihe. Welche?

Zum Selbststudium: Finden Sie noch mehr **Beispiele**, z.B.

1.) für eine freie abelsche Gruppe und eine Basis darin,

2.) für eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe und verschiedene Basen darin,

3.) für eine nicht torsionsfreie Gruppe,

4.) für eine torsionsfreie abelsche Gruppe, die nicht frei ist,

5.) für die Zerlegung einer endlich erzeugten abelschen Gruppe in die direkte Summe ihres Torsionsteil und einer freien Gruppe,

6.) für endliche nichtabelsche Gruppen: recherchieren Sie, was Diedergruppen sind,

7.) für p-Gruppen,

8.) für unendliche abelsche Gruppen, die endlich erzeugt sind,

9.) für Normalreihen in auflösbaren Gruppen,

10.) für eine Normalreihe aus zyklischen Faktoren von Primzahlordnung in einer endlichen auflösbaren Gruppe.