Algebra – Letztes Blatt 13

hhu Düsseldorf
SoSe 2021

Abgabe: bis Mittwoch 14.7.2021, 12:10 Uhr

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/algebra/`
Die folgenden vier Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Zeigen Sie, dass es zu jeder endlichen Gruppe G einen Körper K und eine Galoiserweiterung L von K gibt mit Galoisgruppe $\cong G$. (Benutzen Sie, dass sich G in eine symmetrische Gruppe einbetten lässt.)

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei $f \in K[T]$ irreduzibel vom Primzahlgrad $p \neq \operatorname{char} K$. Seien x, y mit $x \neq y$ Wurzeln von f in einem Zerfällungskörper L. Zeigen Sie: Gilt $y \in K(x)$, so ist $L = K(x)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei $f \in K[T]$ irreduzibel und separabel, $L|K$ ein Zerfällungskörper von f, und $x_1, \dots, x_n \in L$ die Wurzeln von f. Zeigen Sie: Ist $\operatorname{Gal}(L|K)$ abelsch, so gilt $L = K(x_i)$ für alle i.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Sei K ein Körper der Charakteristik 0, es sei $f \in K[T]$ vom Grad 4 mit symmetrischer Galoisgruppe S_4, und sei x eine Wurzel von f in einem Zerfällungskörper L von f über K.
Zeigen Sie:

(i) Die dem Zwischenkörper $K(x)$ der Galoiserweiterung $L|K$ entsprechende Untergruppe von $\operatorname{Gal}(L|K)$ ist isomorph S_3.

(ii) Es gibt keine Untergruppe H von S_4 mit $S_3 \subsetneqq H \subsetneqq S_4$.
(Hier wird S_3 mit $\{\sigma \in S_4;\ \sigma(4) = 4\}$ identifiziert.)

(iii) Es gibt keinen Quadratwurzelturm von K nach $K(x)$.

Bitte wenden

Wissensfragen zu A23 und A24: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Was nennt man den Fixkörper einer Untergruppe einer Galoisgruppe?
2.) Welche Galoisgruppe hat dann der Erweiterungskörper über diesen Fixkörper?
3.) Wann wird ein Polynom symmetrisch genannt?
4.) Was nennt man die j-te elementarsymmetrische Funktion? Ist diese ein Polynom?
5.) Welche Rolle spielen die elementarsymmetrischen Funktionen für die symmetrischen rationalen Funktionen?
6.) Was besagt der Hauptsatz der Galoistheorie (beide Teile)?
7.) Warum hat $\mathbb{C}$ keine algebraische Erweiterung vom Grad 2?
8.) Wie folgt damit der Hauptsatz der Algebra aus dem Hauptsatz der Galoistheorie?
9.) Welche Eigenschaften von $\mathbb{R}$ aus der Analysis werden in dem Beweis benutzt?
10.) Wird im Beweis sogar der Satz von Sylow benutzt? Inwiefern?
11.) Welche Körpererweiterungen heißen Radikalerweiterung?
12.) Wann heißt ein separables Polynom auflösbar durch Radikale?
13.) Was ist ein Radikalturm?
14.) Welches gruppentheoretisches Ergebnis steckt hinter der Aussage, dass paarweise verschiedene Elemente einer Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L|K)$ linear unabhängige Elemente des L-Vektorraums $\mathrm{Abb}(L, L)$ sind?
15.) Welche Eigenschaft hat die Galoiserweiterung $K(x)$, wenn eine n-te Wurzel x eines $a \in K$ an K adjungiert wird? Welche Voraussetzungen an K sind dabei notwendig? Entsteht in diesem Fall jede zyklische Körpererweiterung von K durch Adjunktion einer solchen „reinen“ Wurzel?
16.) Was nennt man die normale Hülle einer separablen endlichen Erweiterung?
17.) Ist die normale Hülle einer separablen Radikalerweiterung wieder eine separable Radikalerweiterung?

Zum Selbststudium: Finden Sie noch mehr **Beispiele**, z.B.

1.) für den Fixkörper einer Untergruppe einer Galoisgruppe,
2.) für die Galoisgruppe über einem Fixkörper einer Untergruppe der Automorphismengruppe des zugehörigen Erweiterungskörpers,
3.) für symmetrische und elementarsymmetrische Polynome,
4.) für die Darstellung eines symmetrischen Polynoms mit elementarsymmetrischen Polynomen,
5.) für einen Radikalturm eines bestimmten Typs,
6.) für die normale Hülle einer Körpererweiterung, speziell einer separablen Radikalerweiterung.