

Abgabe: bis Mittwoch 7.7.2021, 12:10 Uhr

Vorlesungswebseite: <http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/algebra/>

Die folgenden vier Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei $L|K$ eine endliche normale Erweiterung, $f \in K[T]$ irreduzibel. Zeigen Sie, dass es zu je zwei irreduziblen normierten Faktoren $f_1, f_2 \in L[T]$ von f einen Automorphismus σ von L über K gibt mit $f_1^\sigma = f_2$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei $x \in \mathbb{C}$ eine Wurzel von $T^6 + 3$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(x)|\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad n mit symmetrischer Galoisgruppe S_n (laut Def. A22.11). Zeigen Sie, dass f irreduzibel über \mathbb{Q} ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

- (i) Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe eines irreduziblen separablen Polynoms vom Grad 3 über einem Körper isomorph zu S_3 oder C_3 (der zyklischen Gruppe der Ordnung 3) ist.
- (ii) Bestimmen Sie die Galoisgruppe von $T^3 - T - 1$ über \mathbb{Q} .

Bitte wenden

Wissensfragen zu A21 und A22: (nur mündlich, ohne Abgabe)

- 1.) Welche Eigenschaft haben alle endlichen Untergruppen der multiplikativen Gruppe eines Körpers gemeinsam?
- 2.) Was nennt man den Frobenius-Automorphismus eines endlichen Körpers?
- 3.) Kann es mehrere Körper mit p^k vielen Elementen geben, wobei p^k eine beliebige Primzahlpotenz ist?
- 4.) Wie kann \mathbb{F}_{p^k} als Zerfällungskörper über \mathbb{F}_p konstruiert werden?
- 5.) Warum sind endliche Körpererweiterungen eines endlichen Körpers normal, separabel und einfach?
- 6.) Wann nennt man einen Körper perfekt?
- 7.) Was nennt man die Galoisgruppe von $L|K$?
- 8.) Welche Körpererweiterungen werden galois genannt?
- 9.) Wieviele Elemente hat die Galoisgruppe einer endlichen Galoiserweiterung?
- 10.) An welchen Freund schrieb Galois sein mathematisches Testament am Vorabend des Duells, das Galois nicht überlebte?
- 11.) Gibt es stets eine Galoiserweiterung von \mathbb{Q} , die eine beliebige vorgegebene Gruppe als Galoisgruppe besitzt?
- 12.) Wann heißt eine Galoiserweiterung zyklisch?
- 13.) Was nennt man die Galoisgruppe eines Polynoms? Welche Voraussetzung muss für dieses Polynom gelten, damit diese Gruppe gebildet werden kann?
- 14.) Was nennt man den Kreisteilungskörper der Ordnung n über K ? Was ist sein Grad über K ?
- 15.) Was sind Einheitswurzeln und was sind primitive Einheitswurzeln?
- 16.) Wie nennt man das Minimalpolynom einer Einheitswurzel?
- 17.) Welchen Erzeuger hat man für die zyklische Galoisgruppe einer endlichen Erweiterung eines endlichen Körpers?

Zum Selbststudium: Finden Sie noch mehr **Beispiele**, z.B.

- 1.) für einen Zerfällungskörper über \mathbb{F}_p , wo p prim,
- 2.) für einen quadratischen Körper über \mathbb{F}_{16} ,
- 3.) für die von dem Frobeniusautomorphismus (eines endlichen Körpers K) erzeugte zyklische Gruppe in der Gruppe der Körperautomorphismen von K ,
- 4.) für eine Galoiserweiterung und dazugehörige Galoisgruppe,
- 5.) für einen expliziten Kreisteilungskörper über \mathbb{Q} und über \mathbb{F}_p ,
- 6.) für Kreisteilungspolynome.