

Abgabe: bis Mittwoch 21.4.2021, 12:10 Uhr

Vorlesungswebseite: <http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~khalupczok/algebra/>

Die folgenden vier Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben. Wie üblich sind dabei alle Behauptungen zu beweisen. Resultate aus der Vorlesung dürfen verwendet werden, die zugehörigen Referenznummern können Sie zur Klarstellung dann mit angeben.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Für $1 \leq i \leq n$ sei a_i ein Element endlicher Ordnung aus einer Gruppe G_i .
Bestimmen Sie die Ordnung von $(a_1, \dots, a_n) \in G_1 \times \dots \times G_n$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Bestimmen Sie das Zentrum von S_n ($= \text{Perm}\{1, \dots, n\}$).

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei S ein Erzeugendensystem der Gruppe G .
Gilt $st = ts$ für alle $s, t \in S$, so ist G abelsch.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Sei K die Kommutatorgruppe der Gruppe G . Zeigen Sie:

- (i) G/K ist abelsch,
- (ii) ist $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler mit G/N abelsch, so ist $K \leq N$.

Bitte wenden

Wissensfragen zu A1 und A2: (nur mündlich, ohne Abgabe)

- 1.) Was ist eine Gruppe?
- 2.) Folgt aus linksneutral/linksinvers auch rechtsinvers/rechtsneutral?
- 3.) Ist das Neutralelement und sind inverse Elemente eindeutig bestimmt?
- 4.) Was ist das Inverse eines Produkts von n Gruppenelementen?
- 5.) Welche Beispiele für Gruppen kennen Sie?
- 6.) Was ist eine Permutationsgruppe, was ist die symmetrische Gruppe?
- 7.) Was ist die Ordnung eines Gruppenelements, im Gegensatz zur Gruppenordnung?
- 8.) Wie wird eine Untergruppe definiert?
- 9.) Wie definiert man das Zentrum einer Gruppe G ?
- 10.) Was sind die Untergruppen von \mathbb{Z} (bzgl. +)?
- 11.) Wie bezeichnet und definiert man die von einer Teilmenge S einer Gruppe erzeugte Untergruppe? Wie können deren Elemente beschrieben werden, je nachdem, ob die Gruppe additiv oder multiplikativ geschrieben wird?
- 12.) Was ist eine zyklische Gruppe? Wie kann man deren Elemente mit einem Erzeuger der Gruppe beschreiben? Sind Erzeuger zyklischer Gruppen eindeutig bestimmt?
- 13.) Wie lässt sich mit einer Untergruppe H einer Gruppe G eine Äquivalenzrelation auf G definieren? Warum nennt man die zugehörigen Äquivalenzklassen Linksnebenklassen?
- 14.) Was ist der Index einer Untergruppe H in einer Gruppe G ? Warum ist dieser ein Teiler der Gruppenordnung? Was besagt der Satz von Lagrange?
- 15.) Warum teilt die Ordnung eines Elements stets die Gruppenordnung?
- 16.) Was genau ist ein Normalteiler einer Gruppe?
- 17.) In welchen Gruppen ist jede Untergruppe ein Normalteiler?
- 18.) Wie kann mit Hilfe eines Normalteilers die zugehörige Faktorgruppe definiert werden? Warum ist die darauf erklärte Gruppenverknüpfung wohldefiniert?
- 19.) Was sind die Faktorgruppen von \mathbb{Z} (bzgl. +)?
- 20.) Welche Untergruppe einer Gruppe G heißt Kommutatoruntergruppe? Was genau nennt man einen Kommutator?

Zum Selbststudium: Finden Sie noch mehr **Beispiele**, z.B.

- 1.) für eine Gruppe mit 4 Elementen,
- 2.) für einen Gruppenisomorphismus zwischen $\text{Aut}(V)$ und $\text{GL}(n, K)$, wenn V ein n -dimensionaler K -Vektorraum ist,
- 3.) eine endliche Gruppe, die aus Drehungen der xy -Ebene um den Ursprung besteht,
- 4.) zur Berechnung der Gruppenordnung von $\underline{2} = 2 + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,
- 5.) eine nichtabelsche Gruppe mit Zentrum $\neq \{e\}$,
- 6.) für die von $\underline{3}$ erzeugte Untergruppe einer Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,
- 7.) für die Kommutatoruntergruppe einer nichtabelschen Gruppe.