Wdh.:

Bezeichnung	Symbol	lies	ist genau dann wahr, wenn
Negation	$\neg A$	nicht A	A falsch ist
Alternative	$A \vee B$	A oder B	A oder B oder beide wahr sind
Konjunktion	$A \wedge B$	A und B	A und B wahr sind
Implikation	$A \Rightarrow B$	wenn A, dann B	A falsch oder B wahr ist
Äquivalenz	$A \Leftrightarrow B$	A gdw. B	A genau dann wahr ist, wenn B wahr ist

<u>Beweise:</u> Wollen neue Sätze herleiten mittels Beweise.

<u>Satz:</u> $\underset{\text{Vor.}}{\underset{\uparrow}{A}} \Rightarrow \underset{\text{Beh.}}{\underset{\uparrow}{B}}$

<u>Beweis:</u> • direkt: Angabe einer Implikationskette
$$A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow C_n \Rightarrow B.$$

• indirekt:
- Kontrapositionsbeweis: direkte Beweis von $\neg B \Rightarrow \neg A$, denn dies beweist $A \Rightarrow B$ wegen
$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$
- Widerspruchsbeweis: Aus A und $\neg B$ wird eine falsche Aussage hergeleitet, der sogenannte Widerspruch.

Bsp. für Kontrapositionsbeweis:

Satz: Ist $2n$ keine Primzahl, dann ist $n \neq 1$.

$$\begin{cases} A: 2n \text{ ist kein PZ}, \quad B: n \neq 1 \\ (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \end{cases}$$

Beweis: Wäre $n = 1$, so wäre $2 \cdot n = 2 \cdot 1 = 2$ eine Primzahl, im Widerspruch zur Vor.

d.h. $\neg B \Rightarrow \neg A$ $\square$

Satz: Für $x > 9$ hat $\sqrt{x} = 2$ keine Lösung

Beweis (durch Kontrap.), d.h. zeigen: $\sqrt{x} = 2$ hat eine Lsg. x $\Rightarrow x \leq 9$.

Sei x eine reelle Lsg. von $\sqrt{x} = 2$.

Dann ist $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = 2 \cdot 2 = 4 \leq 9$. $\square$

Satz:

$$((A \wedge \neg B) \Rightarrow 0 = 1) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$$

Beweis: $((A \wedge \neg B) \Rightarrow 0 = 1) \Leftrightarrow (0 \neq 1 \Rightarrow \neg(A \wedge \neg B))$

$\Leftrightarrow (0 \neq 1 \Rightarrow (\neg A \vee B)) \Leftrightarrow (\underbrace{0 \neq 1}_{\text{wahr}} \Rightarrow (A \Rightarrow B))$

$\Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$. $\square$

Bsp. für einen Widerspruchsbeweis:

Satz: Für $x > 9$ hat $\sqrt{x} = 2$ keine Lösung.

Beweis (durch Widerspruch): Ann.: Sei $x > 9$ eine Lösung von $\sqrt{x} = 2$.

Dann ist $2 = \sqrt{x} > \sqrt{9} = 3$, also $2 > 3$, $\lightning$ $\square$

Satz: Vor.: Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 2$.

Beh.: Wenn $2^n - 1$ Primzahl ist, dann ist n ungerade.

<u>Beweis (Kontraposition):</u> A: $2^n - 1$ ist Primzahl

B: n ungerade

Zeigen $A \Rightarrow B$ unter der Vor. $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 2$,

d.h. $\neg B \Rightarrow \neg A$ " " .

Ist n gerade, etwa $n = 2 \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$,

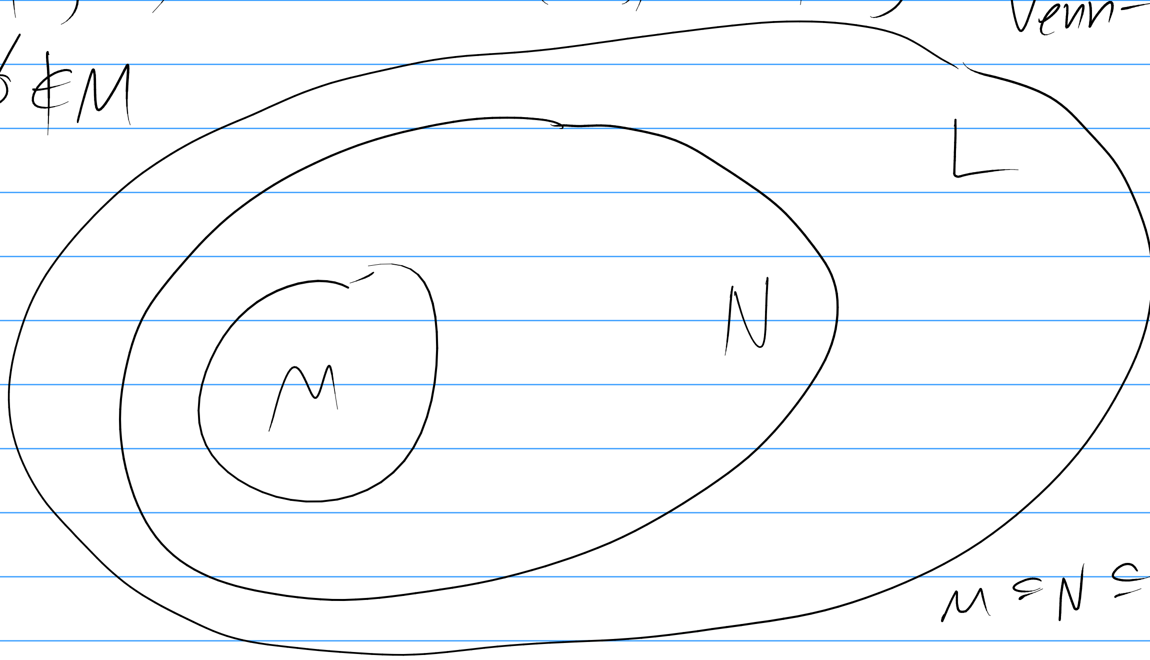
dann ist
$$2^n - 1 = 2^{2k} - 1 = (2^k)^2 - 1 = \underbrace{(2^k - 1)}_{\substack{>1 \\ \text{und} < 2^n - 1 \\ \text{für } k > 1}} \cdot \underbrace{(2^k + 1)}_{\substack{>1 \\ \text{und} < 2^n - 1 \\ \text{für } k > 1}}$$

zusammengesetzt, also nicht prim. $\square$

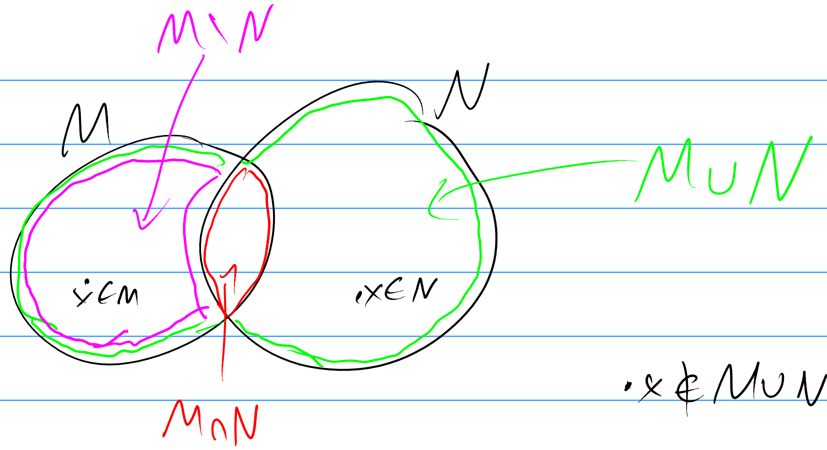
$M = \{2, 3\} \supseteq \emptyset$ aber $\emptyset \notin M$

$P = \{\{1\}, \{1,2\}, \emptyset\} \rightarrow \emptyset \in P$ ✓, $\emptyset \subseteq P$

Venn-Diagramme



$M \subseteq N \subseteq L$



Bsp.: $M = \{1,2,3\}$, $N = \{1,2,4\}$

$M \cap N = \{1,2\}$, $M \cup N = \{1,2,3,4\}$

$M \setminus N = \{3\}$, $N \setminus M = \{4\}$

$N' = \{1,2\} \rightsquigarrow N' \setminus M = \emptyset$

$N' \subseteq N$, $N' \subseteq M$

$M \setminus (N \setminus O)$ $\qquad$ $O = \{5\}$

$(M \setminus N) \setminus O$ $\qquad$ $\underline{O \cap M = \emptyset = O \cap N}$

$O \cup M$: disjunkte Vereinigung