- exp, ln, $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\rightsquigarrow \exp(z+w) = \exp(z)\cdot\exp(w)$$

- Für $x \in \mathbb{R}$ ist

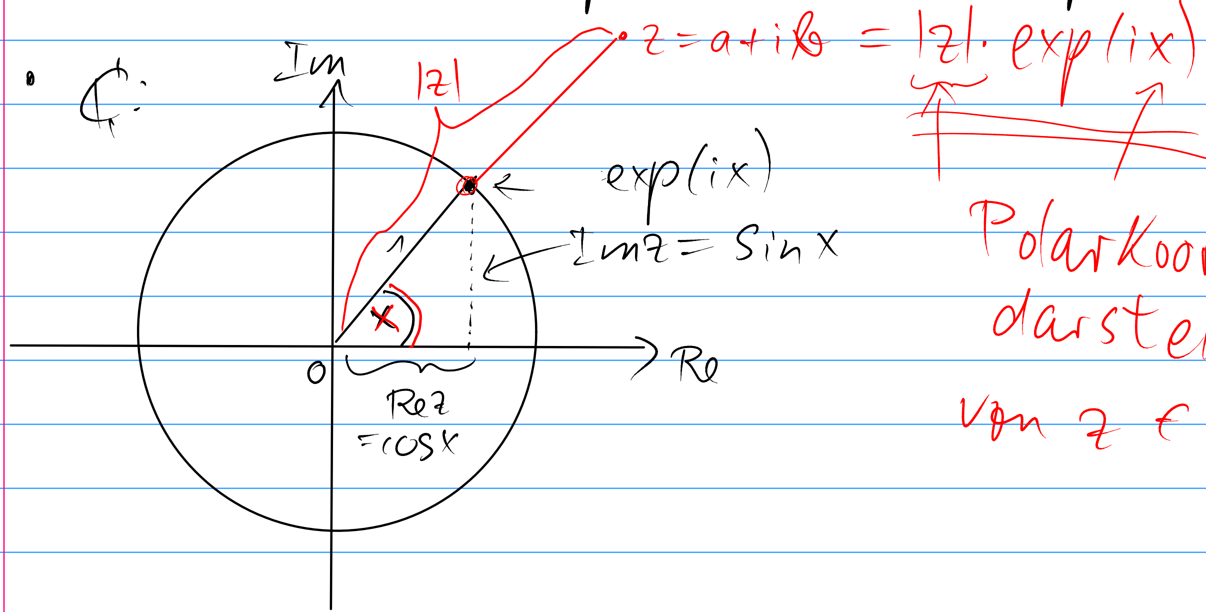
$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x$$

mit Fkt. $\cos, \sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

- $|\exp(ix)| = 1$, da

$$|\exp(ix)|^2 = \exp(ix)\cdot\overline{\exp(ix)}$$
$$= \exp(ix)\cdot\exp(\overline{ix})$$
$$= \exp(ix)\cdot\exp(-ix)$$
$$= \exp(ix-ix) = \exp(0) = 1$$

- $\mathbb{C}$:



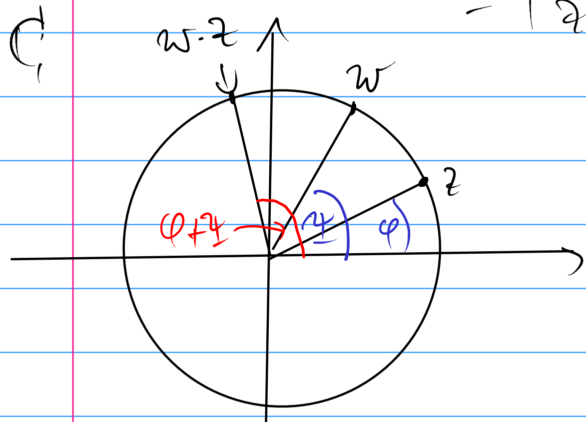
Polarkoordinatendarstellung von $z \in \mathbb{C}$

• Polarkoordinatenrechnen: $z, w \in \mathbb{C}$,

$$z = |z| \exp(i\varphi), \quad w = |w| \exp(i\psi)$$

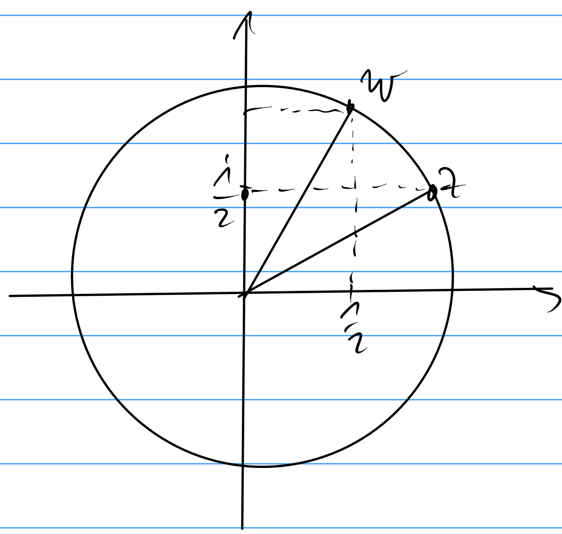
Dann: $z \cdot w = |z| \cdot |w| \exp(i\varphi) \cdot \exp(i\psi)$

$$= |z| \cdot |w| \exp(i(\varphi + \psi))$$



$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \exp(i(\varphi - \psi))$$

Bsp.: $z = \exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)$, $w = \exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$



$$z = \cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3} + i \cdot \frac{1}{2} \quad \leftarrow$$

$$w = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$z \cdot w = \exp\left(i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \exp\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{1}}$$

π-Berechnung:

$$\pi = \min\{x>0;\ \sin x = 0\}$$

⇝ numerische Berechnung: Newtonverfahren
numerisch über Potenzreihe des Sin

⇝ Formeln: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

langsam!

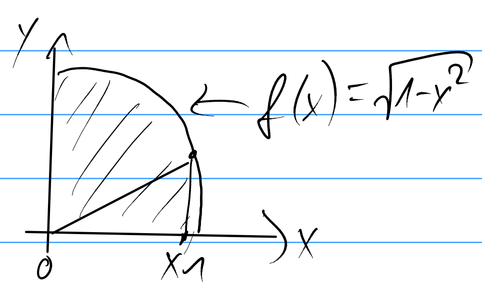
schnelle π-Berechnung:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

wobei $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1}$

π = Flächeninhalt des Einheitskreises:

$$\frac{\pi}{4} \overset{!}{=} \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$



Stetigkeit:

- Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $c \in D$.

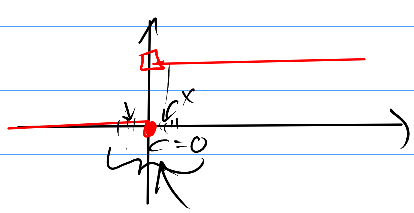
1. Def.: Gilt für alle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen c konvergieren, auch, dass dann $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(c)$ konvergiert, dann heißt die Fkt. f (folgen-) stetig in c.

$$\left[\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}: a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c \Rightarrow f(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(c)\right]$$

2. Def.: f heißt $(\varepsilon-\delta)$-stetig in c, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(c)| < \varepsilon$$

Anschaulich: f macht "keinen Sprung" in c



$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

unstetig in $c = 0$

- f heißt stetig, falls f in jedem Punkt $c \in D$ stetig ist.

Anschaulich: Können Funktionsgraph "in einem Strich" durchzeichnen

- Stetigkeitssätze:

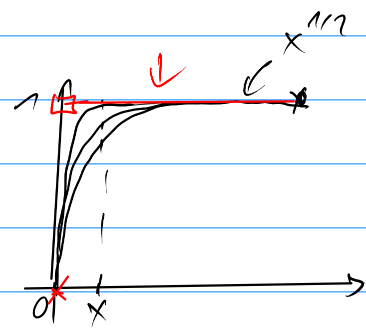
$\left.\begin{cases}\text{Produkt}\\ \text{Summe}\\ \text{Hintereinanderausführung}\end{cases}\right\}$ von stetigen Funktionen ergibt stetige Funktion

- Für $x \in [0,1]$: $f_n(x) := x^{1/n}$ stetig

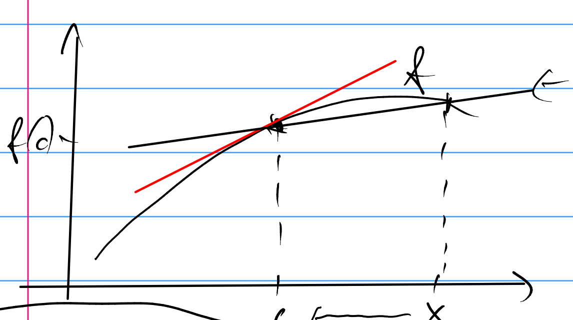
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \underbrace{\lim_{n\to\infty} x^{1/n}}_{=1 \text{ für } x>0,} = 1$$

denn $x^{1/n} = e^{(1/n)\ln x} \xrightarrow{n\to\infty} e^0 = 1$, da exp stetig

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{1/n}}_{=0} = 0$$

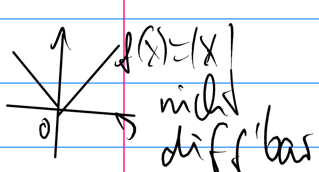


Differenzierbarkeit: $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $c \in D$



$$Q_{f,c}(x) := \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

$$Q_{f,c}: D \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$$

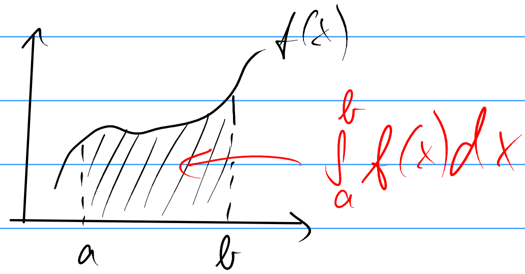


$f'(c) := \lim_{x\to c} Q_{f,c}(x)$ Ableitung, falls existent

diff'bar $\Rightarrow$ stetig
$\not\Leftarrow$

$\neg$(stetig $\Rightarrow$ diff'bar) : Bsp.: $f(x) = |x|$ stetig
und nicht diff'bar

Integration:



Hauptsatz: f st. auf IV, dann:

a) $\Big(\underbrace{\int_a^x f(t)\,dt}_{F(x)}\Big)' = f(x)$, b) $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$,
wo $F' = f$

Bsp.: $\int_0^1 \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{f(x)}\,dx \overset{s.M.}{=} \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi$
$g(x) = \sin\varphi$

$\overset{p.I.}{=} \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi$

$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4}$ //
