Wdh.:

▷ Geom. Σ-Formel: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \underbrace{\frac{x^{n+1}-1}{x-1}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$

Falls $|x| < 1$, ist $x^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

dann: $$\sum_{n=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

▷ Betr. Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$

→ die Folge ist streng mon. wachsend

→ alle a_n sind ≤ 4, denn

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\leq 2 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4$$

Es folgt (mit Satz): Die Folge (a_n) kgt.,

$e := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ heißt Eulersche Zahl.

Beh.: $\forall x,y>0: \ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$

Bew.:

$$e^{\ln(x)+\ln(y)} \overset{\downarrow}{=} e^{\ln(x)}\cdot e^{\ln(y)} = x\cdot y = e^{\ln(xy)}$$

$$\Rightarrow \ln(x)+\ln(y)=\ln(xy). \qquad \square$$

Beh.: $\forall x,y>0: \ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$.

Bew.: $e^{\ln(x)-\ln(y)} = e^{\ln(x)}\cdot e^{-\ln(y)} = e^{\ln(x)}\cdot\frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{x}{y}$

$$= e^{\ln(x/y)}$$

$$\Rightarrow \ln(x)-\ln(y)=\ln\left(\frac{x}{y}\right). \qquad \square$$

Beh.: $\forall a>0, \forall x\in\mathbb{R}: \ln(a^x)=x\ln a$

Bew.: $e^{x\ln a} = e^{\ln a\cdot x} = \left(e^{\ln a}\right)^x = a^x = e^{\ln(a^x)}$

$$\Rightarrow x\ln a = \ln(a^x). \qquad \square$$

Lsg. von $a^x=c$ in $a\in\mathbb{R}$? $\quad c \quad \mathbb{L}=\{a\in\mathbb{R};\ a^x=c\}$

1. Fall: $x=0$, (a) $c\neq 1 \Rightarrow \mathbb{L}=\emptyset$

   (b) $c=1 \Rightarrow \mathbb{L}=\mathbb{R}$

2. Fall: $x\neq 0 \rightsquigarrow a=c^{1/x} \Rightarrow \mathbb{L}=\{c^{1/x}\}$