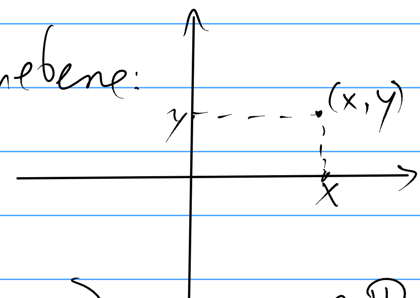
$(1,2) \neq (2,1)$ ← "geordnetes Paar"

$\{1,2\} = \{2,1\}$

Bsp.: $M = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow M \times N = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y);\ x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\} =: \mathbb{R}^2$

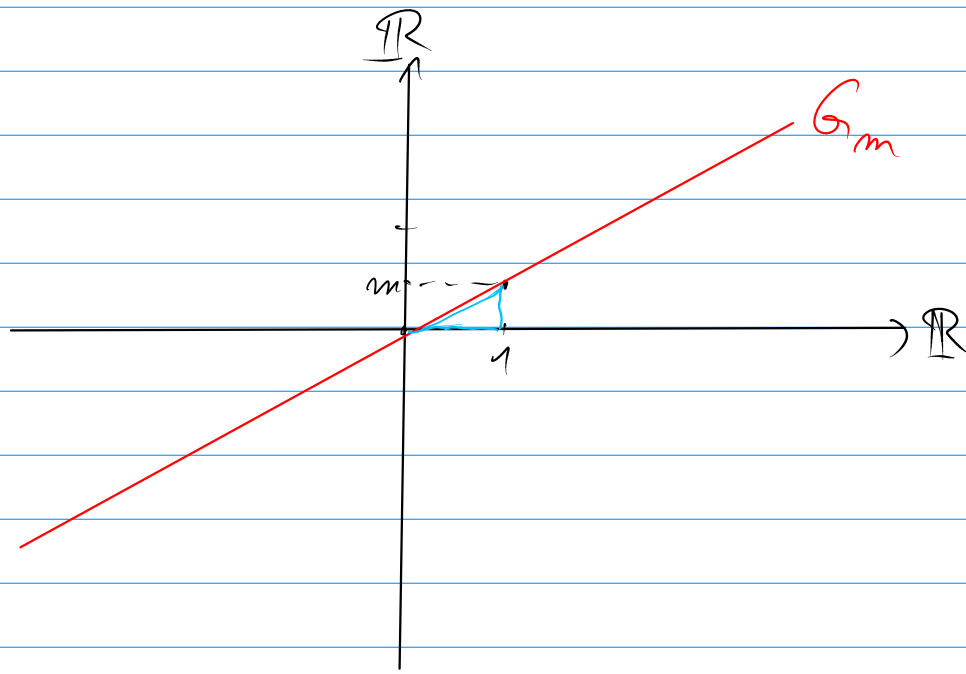
→ Zeichenebene:



Entsprechend: $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z);\ x,y,z \in \mathbb{R}\}$

Bsp.: $M = \{1,2\}$, $N = \{3,4\}$

→ $M \times N = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$



Zeichenebene $\mathbb{R}^2 = \{(x,y);\ x,y \in \mathbb{R}\}$

<u>Ursprungsgeraden:</u>

- Sei $m \in \mathbb{R}$. Dann ist die Ursprungsgerade mit Steigung m die Menge

$$G_m := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = mx\}$$
$$= \{(x, mx);\ x \in \mathbb{R}\}$$

Klar: $G_m \subseteq \mathbb{R}^2$

Klar: G_0 ist die x-Achse
Aber die y-Achse ist nicht eine der genannten Ursprungsgeraden

y-Achse: $H_0 := \{(0,y);\ y \in \mathbb{R}\}$

Menge aller Ursprungsgeraden: $\{\underbrace{G_m}_{\subseteq \mathbb{R}^2};\ m \in \mathbb{R}\} \cup \{\underbrace{H_0}_{\subseteq \mathbb{R}^2}\}$

$\forall m \in \mathbb{R}: G_m \subseteq \mathbb{R}^2$, und $H_0 \subseteq \mathbb{R}^2$

$g \in \{G_m;\ m \in \mathbb{R}\} \cup \{H_0\} \Rightarrow g$ Ursprungsgerade

- Andere Beschreibung der Ursprungsgeraden: Für $s \in \mathbb{R}$

sei $H_s := \{(sy, y);\ y \in \mathbb{R}\} = \{(x,y);\ x = sy\}$

Menge aller Ursprungsgeraden: $\{H_s;\ s \in \mathbb{R}\} \cup \{G_0\}$

Kleiner Gauß:

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}: \overbrace{1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2} n(n+1)}^{E(n)}$

Bew.: (durch vollst. Ind.)

Ind.anfang: $n=1$:

$$l.S.(1) = 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = r.S.(1) \checkmark$$

Ind.schritt: Beh.: $E(n) \Rightarrow E(n+1)$,

$\rightarrow$ d.h. gilt $1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2} n(n+1)$,

dann gilt $1+2+3+\ldots+(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+1+1)$.

Bew.: Ind.ann.: $E(n)$ richtig für $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt:

$$l.S.(n+1) = \overbrace{1+2+\ldots+n}+(n+1)$$

$$\underset{\text{Ind. ann.}}{=} \frac{1}{2} n \cdot (n+1) + (n+1)$$

$$= (n+1) \cdot \left(\frac{1}{2} n + 1\right)$$

$$= (n+1) \cdot \frac{n+2}{2} = \frac{1}{2}(n+1)((n+1)+1)$$

$$= r.S.(n+1). \quad \square$$

__Bernoulli-Ungl.:__

__Beh.:__ $a \in \mathbb{R},\ 1+a>0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: (1+a)^n \geq 1+na$

__Bew.: (vollst. Ind.)__

__Ind.anf.:__ $n=1$: $l.S.(1) = (1+a)^1 \geq 1+1\cdot a = r.S.(1)$ ✓

__Ind.schritt:__ $n \rightsquigarrow n+1$:

$$
\begin{aligned}
l.S.(n+1) = (1+a)^{n+1} &= (1+a)^n \cdot (1+a) \\
&\underset{\substack{\text{Ind.ann.,} \\ 1+a>0}}{\geq} (1+na)\cdot(1+a) \\
&= 1+a+na+na^2 \\
&= 1+a(n+1) + \underbrace{na^2}_{\geq 0} \\
&\geq 1+(n+1)a \\
&= r.S.(n+1).
\end{aligned}
$$

$\square$

Bsp.: Bei der falschen Formel $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2+3$

ist Ind.schritt beweisbar,
aber Ind.anfang geht nicht: $l.S.(1) = \underline{\underline{1 \neq 4}} = 1^2+3 = r.S.(1)$

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(2n+1)(n+1)$