<u>F15:</u> Jede <u>irrationale</u> Zahl α ist auf genau eine Weise als nat. Kettenbruch darstellbar (u. dieser Kettenbruch ist notwendigerweise <u>unendlich</u>).

<u>Bew.</u> 1) $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Wir betrachten den der Zahl α auf obige Weise zugeordneten (unendlichen!) Kettenbruch

(32) $\quad [q_0; q_1, q_2, \ldots\ldots]$

Dieser ist nach F12 <u>konvergent</u>. Sei β sein Wert (d.h. der Limes der endlichen Abschnitte von (32))

<u>Beh.</u> $\beta = \alpha$

Seien $\frac{c_k}{d_k}$ die N.B. von (32). <u>z.z.</u> $\frac{c_k}{d_k} \to \alpha$ für $k \to \infty$.

Mit den wie <u>oben</u> definierten $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}, \rho_n$ gilt

(30) $\quad \alpha = [q_0; q_1, \ldots, q_{n-1}, \rho_n] \qquad [n \geq 1]$

n-ter N.B. von $[q_0; q_1, \ldots, q_{n-1}, \rho_n] = \alpha \qquad$ [vgl. Def. 5]

$(n-1)$-ter N.B. von $[q_0; q_1, \ldots, q_{n-1}, \rho_n] = \frac{c_{n-1}}{d_{n-1}}$

Für die Differenz zweier aufeinanderfolgender N.B.'e gilt aber nach F7

(33) $\quad \left| \alpha - \frac{c_{n-1}}{d_{n-1}} \right| = \frac{1}{d_{n-1} d_n'}$,

wobei d_n' der Nenner des letzten N.B. von (30) ist, also

$$d_n' = d_{n-1} \rho_n + d_{n-2} \qquad \text{(nach F6)}$$

Wegen $\rho_n > 0$ geht (33) gegen 0 für $n \to \infty$.

2) <u>Eindeutigkeit</u>: Gelte $\alpha = [q_0; q_1, \ldots] = [q_0'; q_1', \ldots]$. Dann

[vgl. F10(iv) für ρ_1 statt α] $\quad \alpha = q_0 + \frac{1}{\rho_1} = q_0' + \frac{1}{\rho_1'}$, $\quad \rho_1 = [q_1; q_2, \ldots] > 1$, $\rho_1' = [q_1'; q_2', \ldots] > 1$

$\Rightarrow q_0 = [\alpha] = q_0'$, $\Rightarrow \rho_1 = \rho_1' \Rightarrow q_1 = q_1'$, u.s.w.

<u>Bem.</u> Ist $\alpha \in \mathbb{Q}$, so hat α Darstellung als endlicher Kettenbruch

(34) $$\alpha = [q_0; q_1, \dots, q_n],$$

der – falls $n \geq 1$ ist –, mit einem $q_n \geq 2$ endet.

<u>1. Beweis:</u> Für $\alpha \in \mathbb{Z}$ ist $\alpha = [q_0]$ mit $q_0 = \alpha$, also die Beh. richtig. Sei also $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Dann (vgl. Bem. zu F14) liefert der eukl. Algorithmus (34) mit $n \geq 1$ und $q_n \geq 2$.

<u>2. Beweis:</u> Sei $\alpha = [q_0; q_1, \dots, q_n]$ mit $n \geq 1$ und $q_n = 1$.
Ist $n = 1$, so $\alpha = q_0 + \frac{1}{q_1} = q_0 + 1 \in \mathbb{Z}$, also $\alpha = [q_0 + 1]$. ✓
Sei also $n \geq 2$. $\rho_{n-1} = q_{n-1} + \frac{1}{q_n} = \underbrace{q_{n-1} + 1}_{\geq 2} \in \mathbb{Z}$. Damit

1 Gleichwertiges $$\alpha = [q_0; q_1, \dots, q_{n-2}, \rho_{n-1}] = [q_0; q_1, \dots, q_{n-2}, q_{n-1} + 1].$$ ✓

<u>Def.</u> Ein (end.) Kettenbruch, der nicht mit 1 endet, falls er nicht von der Form $[q_0]$ ist, heißt ein <u>normierter Kettenbruch</u>. (Unendliche Kettenbrüche sind alle normiert.)

<u>Bem.</u> Sind $[q_0; q_1, \dots, q_n]$ und $[q_0'; q_1', \dots, q_m']$ mit $n \geq m$ beide normiert vom selben Wert α, so folgt $m = n$ und $q_i' = q_i$ für alle i.

<u>Bew.</u> Sei $n > 0$. Dann $\alpha = q_0 + \frac{1}{\rho_1}$ und wegen Normiertheit ist $\rho_1 > 1$. Also $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Daher auch $m > 0$. Dann $q_0 + \frac{1}{\rho_1} = q_0' + \frac{1}{\rho_1'}$, mit $\rho_1' > 1$. Es folgt $q_0 = [\alpha] = q_0'$, also $\rho_1 = \rho_1'$. Per Induktion Beh. klar. Bleibt der Fall $n = 0$ (und damit auch $m = 0$). Dann Beh. klar. □

Wir fassen zusammen:

Satz 2: (i) Ordnet man jeder reellen Zahl ihre Kettenbruchentwicklung zu, so erhält man eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und der Menge aller normierten Kettenbrüche

(35) $$\mathbb{R} \ni \alpha \longleftrightarrow [q_0; q_1, \dots]$$

Die Umkehrabb. ordnet jedem normierten Kettenbruch dessen Wert zu:

$$\alpha = [q_0; q_1, \dots]$$

(ii) α rational $\Longleftrightarrow$ Kettenbruchentw. von α ist endlich

(iii) Für die Näherungsbrüche $\frac{c_k}{d_k}$ des zu α gehörigen Kettenbruchs gilt [1]

(36) $$\frac{1}{d_k(d_k+d_{k+1})} < \left|\alpha - \frac{c_k}{d_k}\right| \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{d_k d_{k+1}} \qquad (k \geq 0),$$

[1] nur sinnvoll, falls es überhaupt noch ein d_{k+1} gibt

anders geschrieben

(37) $$\frac{1}{d_k + d_{k+1}} < |d_k\alpha - c_k| \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{d_{k+1}} \qquad (k \geq 0)$$

Zusatz: Die Ungleichungen (*) gelten mit $<$ bis auf den Fall:

$$\alpha = [q_0; q_1, \dots, q_n] \quad \text{und} \quad k = n-1$$

Beweis: 1) (i) und (ii) schon gezeigt (vgl. F15 und anschl. Bem'n).
Die Ungleichungen (*) und der Zusatz sind klar für $\alpha \notin \mathbb{Q}$, vgl. F11.
Sei $\alpha \in \mathbb{Q}$ und $\alpha = [q_0; q_1, \dots, q_n]$ mit $q_n > 1$, $n \geq 1$. Für $k \leq n-1$ gilt

$k \geq 0$

$$\left|\frac{c_{k+1}}{d_{k+1}} - \frac{c_k}{d_k}\right| = \frac{1}{d_k d_{k+1}} \qquad \text{(nach F7)}$$

Sei $k < n-1$, also $k, k+1 \leq n-1$. Für $l \leq n-1$:

$$\text{N.B.'e gerader Ordnung } l < \alpha = \frac{c_n}{d_n} < \text{N.B.'e ungerader Ord. } l$$

α liegt also echt zwischen $\frac{c_{k+1}}{d_{k+1}}$ und $\frac{c_k}{d_k}$, d.h. (*) gilt mit $<$.

Für $k = n-1$ ist $\left|\alpha - \frac{c_k}{d_k}\right| = \left|\frac{c_n}{d_n} - \frac{c_{n-1}}{d_{n-1}}\right| = \frac{1}{d_{n-1} d_n} = \frac{1}{d_k d_{k+1}}$.

2) <u>b.z.z.</u> : Die Abschätzung nach unten in (36).

Für k gerade gilt

$$(38) \qquad \frac{c_k}{d_k} < \alpha \leq \frac{c_{k+1}}{d_{k+1}}$$

[Falls k ungerade gilt $\frac{c_{k+1}}{d_{k+1}} \leq \alpha < \frac{c_k}{d_k}$ und das Folgende geht analog.]

Aus (38) folgt

$$(39) \qquad \frac{c_k}{d_k} < \frac{c_k + c_{k+1}}{d_k + d_{k+1}} < \frac{c_{k+1}}{d_{k+1}}$$

[Denn $\frac{c}{d} < \frac{c+c'}{d+d'} < \frac{c'}{d'}$ für alle $c, c', d, d' \in \mathbb{R}$ mit $d, d' > 0$ und $\frac{c}{d} < \frac{c'}{d'}$.]

<u>Beh.</u> $$(40) \qquad \frac{c_k + c_{k+1}}{d_k + d_{k+1}} < \alpha \leq \frac{c_{k+1}}{d_{k+1}}$$

Mit (40) folgt

$$\left|\alpha - \frac{c_k}{d_k}\right| > \left|\frac{c_k + c_{k+1}}{d_k + d_{k+1}} - \frac{c_k}{d_k}\right| = \left|\frac{c_k d_k + c_{k+1} d_k - c_k d_k - c_k d_{k+1}}{d_k(d_k + d_{k+1})}\right|$$

$$\overset{(F7)}{=} \frac{1}{d_k(d_k + d_{k+1})} \quad \checkmark$$

Was noch fehlt, ist der Beweis der Beh. (40).

Bew. der Beh. (40):

Def. $\frac{c}{d}, \frac{c'}{d'}$ Brüche mit $\frac{c}{d} < \frac{c'}{d'}$ und $d, d' > 0$.

$\frac{c+c'}{d+d'}$ heißt Medianwert von $\frac{c}{d}, \frac{c'}{d'}$. Die Brüche

$$(41) \qquad \frac{c_k + q\, c_{k+1}}{d_k + q\, d_{k+1}} \qquad q = 0, 1, \dots, q_{k+2}$$

heißen Zwischenbrüche der Näherungsbrüche $\frac{c_k}{d_k}, \frac{c_{k+1}}{d_{k+1}}$.

0-ter Zw.bruch $= \frac{c_k}{d_k}$, q_{k+2}-ter Zw.bruch $= \frac{c_{k+2}}{d_{k+2}}$.

Für $q > 0$ ist der Zw.bruch (41) von $\frac{c_k}{d_k}, \frac{c_{k+1}}{d_{k+1}}$ ein Medianwert von $\frac{c_k}{d_k}, \frac{q\, c_{k+1}}{q\, d_{k+1}} = \frac{c_{k+1}}{d_{k+1}}$. – Damit folgt

Für $q_{k+2} > 1$ Medianw. von (*) und $\frac{(q_{k+2}-1)\, c_{k+1}}{(q_{k+2}-1)\, d_{k+1}} = (**)$

$$(42) \qquad \frac{c_k}{d_k} < \overset{(*)}{\frac{c_k + c_{k+1}}{d_k + d_{k+1}}} \leq \underset{\displaystyle \frac{c_{k+2}}{d_{k+2}}}{\underset{\|}{\frac{c_k + q_{k+2}\, c_{k+1}}{d_k + q_{k+2}\, d_{k+1}}}} \leq \alpha \leq \overset{(**)}{\frac{c_{k+1}}{d_{k+1}}}$$

Damit ist Beh. (40) bewiesen, falls wir noch ausschließen, daß

$$(43) \qquad \frac{c_k + c_{k+1}}{d_k + d_{k+1}} = \frac{c_{k+2}}{d_{k+2}} = \alpha \quad \text{und } q_{k+2} = 1$$

Gälte (43). Dann $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha = [q_0; q_1, \dots, q_{k+2}]$ mit $q_{k+2} = 1$

Doch das verboten, da nur normierte Kettenbrüche zugelassen.

<u>Bem.</u> Aus (iii) in Satz 2 folgt:

$$(44) \qquad \left|\alpha - \frac{c_{k+1}}{d_{k+1}}\right| < \left|\alpha - \frac{c_k}{d_k}\right|$$

<u>Bew.</u> Ist $\frac{c_{k+1}}{d_{k+1}}$ der letzte Näherungsbruch, d.h. $\alpha = \frac{c_{k+1}}{d_{k+1}}$, so ist (44) richtig (denn dann linke Seite von (44) gleich 0, rechte Seite nach (36) aber nicht[*]).

[*] auch nach F8

Andernfalls gilt

$$\left|\alpha - \frac{c_{k+1}}{d_{k+1}}\right| \overset{F8}{\leq} \left|\frac{c_{k+2}}{d_{k+2}} - \frac{c_{k+1}}{d_{k+1}}\right| \overset{F7}{=} \frac{1}{d_{k+1}d_{k+2}},$$

und wegen (36)

$$\left|\alpha - \frac{c_k}{d_k}\right| > \frac{1}{d_k(d_{k+1}+d_k)} \geq \frac{1}{d_k(q_{k+2}d_{k+1}+d_k)} \overset{(F3)}{=} \frac{1}{d_k\, d_{k+2}} \geq \frac{1}{d_{k+1}d_{k+2}}.$$

Es folgt (44).