o.E. $x \ge 3$.

Für $n = [x]$ gilt $\quad n \le x < n+1$, also $\log n \le \log x$
$\qquad n > x-1$

$$\pi(x) \ge \pi(n) \overset{(1)}{\ge} \frac{n}{\log n}\Big(\underbrace{\log 2 - \frac{\log(n+1)}{n}}_{\ge 0}\Big) > \frac{x-1}{\log n}(\dots)$$

$$\ge \frac{x-1}{\log x}(\dots) = \frac{x}{\log x}(\dots) - \frac{1}{\log x}(\dots) =$$

$$\frac{x}{\log x}\left(\log 2 - \frac{\log(n+1)}{n} - \frac{\log 2}{x} + \frac{\log(n+1)}{x\, n}\right) \ge$$

$$\frac{x}{\log x}\left(\log 2 - \frac{\log(n+1)}{n} - \frac{\log 2}{x}\right) \ge$$

$$\frac{x}{\log x}\left(\log 2 - \frac{\log(n+1)}{n} - \frac{\log 2}{n}\right) = \frac{x}{\log x}\left(\log 2 - \frac{\log(2n+2)}{n}\right)$$

$\frac{\log(2n+2)}{n} \le \frac{\log 2}{2}$ für $n \ge 9$ (da $(n+1)^2 \le 2^{n-2}$ für $n \ge 9$, ÜA)

Also gilt (2) für alle $x \ge 9$.

Für $3 \le x \le 9$ ist $\frac{\log 2}{2}\frac{x}{\log x} \le \frac{\log 2}{2}\cdot\frac{9}{\log 9} < 2 \le \pi(x)$. ⌟

Abschätzung von $\pi(n)$ nach oben?

$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \binom{2n}{0}+\binom{2n}{1}+\dots+\binom{2n}{n}+\dots+\binom{2n}{2n}$, also

$\binom{2n}{n} < 2^{2n} \qquad$ Wegen $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$ gilt

$$\prod_{n<p\le 2n} p \;\Big|\; \binom{2n}{n}, \quad \Longrightarrow \quad n^{\pi(2n)-\pi(n)} \le \binom{2n}{n} < 2^{2n}$$

$\pi(2n)-\pi(n)$ Faktoren $>n$

Es folgt

(1) $\pi(2n) - \pi(n) < \frac{2n \log 2}{\log n} = (2\log 2)\frac{n}{\log n}$

speziell für $n = 2^j$, $j \in \mathbb{N}$ also

(2) $\pi(2^{j+1}) - \pi(2^j) < \frac{(2\log 2)2^j}{j \log 2} = \frac{2^{j+1}}{j}$

F 13: $\pi(2^k) < \frac{2^{k+2}}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$

Bew. Beh. richtig für $k = 1, 2, 3$. Induktion nach k. Sei $k \geq 4$

$$\pi(2^k) \overset{(2)}{<} \pi(2^{k-1}) + \frac{2^k}{k-1} \overset{\text{I.V.}}{<} \frac{2^{k+1}}{k-1} + \frac{2^k}{k-1} = \frac{2^{k+1}+2^k}{k-1}$$

doch $\frac{2^{k+1}+2^k}{k-1} \leq \frac{2^{k+2}}{k} \iff \frac{2+1}{k-1} \leq \frac{4}{k} \iff 3k \leq 4(k-1)$

$\iff 4 \leq k$ ✓.

F 14: Für alle reellen $x > 1$ gilt

(3) $$\pi(x) < (8\log 2)\frac{x}{\log x}$$

Bew. $x \in \mathbb{R}, x > 1$. $\exists k \in \mathbb{N}$ mit $2^{k-1} < x \leq 2^k$

$$\pi(x) \leq \pi(2^k) \overset{F13}{<} \frac{2^{k+2}}{k} = \frac{8 \cdot 2^{k-1}}{k} < \frac{8x}{k} \overset{\log x \leq k \log 2}{\leq} \frac{\log 2}{\log x} \cdot 8x,$$

also (3).

<u>Satz 3</u> (Tschebyschew ca 1850) Für alle reellen $x \geq 2$ gilt

$$(4) \qquad \underset{\substack{\parallel \\ 0{,}346\ldots}}{\frac{\log 2}{2}} \frac{x}{\log x} \leq \pi(x) < \underset{\substack{\parallel \\ 5{,}545\ldots}}{(8 \log 2)} \frac{x}{\log x}$$

Insbesondere sind also die Fktn $\pi(x)$ und $\frac{x}{\log x}$ von der gleichen Größenordnung.

Aber ganz anderer Kraftaufwand ist nötig, um zu zeigen, daß

$$(5) \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} \text{ existiert.}$$

Daraus folgt, wie Tschebyschew schon wußte, daß gelten muß:

$$(6) \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1 \qquad (\text{„Primzahlsatz"}).$$

Übrigens zeigt Tschebyschew

$$\frac{2}{3} \frac{n}{\log n} < \pi(n) < 1{,}7 \frac{n}{\log n} \quad \text{für alle } n \geq 3$$

Er zeigt auch

$$0{,}89 \frac{n}{\log n} < \pi(n) < 1{,}11 \frac{n}{\log n} \quad \text{für alle hinreichend großen } n.$$

Der Beweis von (6) ist ein Hauptpunkt einer Vorlesung "Analytische Zahlentheorie".

Nachtrag (zu §2): Periodische Kettenbrüche und quadratische Irrationalzahlen

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißt (reelle) quadratische Irrationalzahl, wenn α einer Gleichung der Gestalt

(1) $\quad a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

genügt mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und $a > 0$; o.E. ggT$(a,b,c) = 1$.

Dann: a, b, c eindeutig bestimmt durch α

$a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{Z}$ [$a_0\alpha^2 + b_0\alpha + c_0 = 0$, $a_0 > 0$ minimal. $a = qa_0 + r$

$(a - qa_0)\alpha^2 + (b - qb_0)\alpha + (c - qc_0) = 0$; $0 \le r < a_0$

$r \neq 0$ geht nicht; also $r = 0$. Dann auch $b - qb_0 = 0$,

$c - qc_0 = 0$. W! $(a,b,c) = 1$, falls $q > 1$]

$D := b^2 - 4ac$ heißt Diskriminante von α.

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{D}, \quad D > 0, \quad \sqrt{D} \notin \mathbb{Q}$$

$\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{D}) = \{x + y\sqrt{D} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ Teilkörper von $\mathbb{R}$.

$\xi = x + y\sqrt{D}$ (eindeutig), $\quad \xi' := x - y\sqrt{D}$ Konjugiertes zu ξ

$$\xi\xi' = x^2 - Dy^2, \quad \frac{1}{\xi} = \frac{\xi'}{x^2 - y^2 D} \quad (\text{falls } \xi \neq 0)$$

F1 (Euler): Ein periodischer*) Kettenbruch stellt eine quadratische Irrationalzahl dar.

*) mit 'Vorperiode', siehe anschließenden Beweis.

$k \in \mathbb{N}$

Bew. $\alpha = [\overbrace{q_0; q_1, \dots, q_{m-1}}^{\text{Vorperiode}}, \overbrace{q_m, q_{m+1}, \dots, q_{m+k-1}}, \overbrace{q_m, q_{m+1}, \dots, q_{m+k-1}}, \dots$

$=: [q_0; \dots, q_{m-1}, \overline{q_m, \dots q_{m+k-1}}]$

$\alpha \notin \mathbb{Q}$, da Kettenbruch nicht endlich.

$$q_{n+k} = q_n \quad \text{für alle } n \geq m \qquad {}^{*)}$$

$\alpha = [q_0; \dots q_{m-1}, \tilde{\alpha}] \qquad \tilde{\alpha} = m\text{-ter Rest}$

$$(*) \quad \alpha = \frac{c_{m-1}\tilde{\alpha} + c_{m-2}}{d_{m-1}\tilde{\alpha} + d_{m-2}} \qquad c_i, d_i \in \mathbb{Z} \qquad (\S 2, F10)$$

q.z.z. $\tilde{\alpha}$ quadr. Irrationalität.

⌈Denn: Sei D Diskr. von $\tilde{\alpha}$. Dann $\tilde{\alpha} \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ Körper!

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $\Rightarrow \alpha = r + s\sqrt{D}$, $\Rightarrow (\alpha - r)^2 = s^2 D$
$r, s \in \mathbb{Q}$ quadr. Gleichung für α (normiert mit rat. Koeff'n)
$\Rightarrow$ Beh. ⌋

Nun ist aber

$$\tilde{\alpha} = [q_m; \dots, q_{m+k-1}, \tilde{\alpha}] \quad \text{rein-periodisch}$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{\tilde{c}_{k-1}\tilde{\alpha} + \tilde{c}_{k-2}}{\tilde{d}_{k-1}\tilde{\alpha} + \tilde{d}_{k-2}}, \Longrightarrow$$

$$\tilde{d}_{k-1}\tilde{\alpha}^2 + (\tilde{d}_{k-2} - \tilde{c}_{k-1})\tilde{\alpha} - \tilde{c}_{k-2} = 0, \quad \tilde{d}_{k-1} > 0$$

$\Rightarrow \tilde{\alpha}$ quadr. Irrationalität.

---

*) minimales solches $k \in \mathbb{N}$ heißt Periodenlänge des Kettenbruches.