F1: Ist $f$ multiplikativ, so auch die zugehörige 'summatorische' Funktion $g$, definiert durch

$$g(n) = \sum_{d \mid n} f(d) \qquad \ulcorner \text{beachte } g(1) = 1 \lrcorner$$

Bew. wie oben für $f = i$, $g = \sigma$ (in §7).

Bsp. $$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d \mid n} d^\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{C})$$

Teilersummenfkt'n, alle multiplikativ.

$$\sigma_\alpha(n) = \prod_p \frac{p^{\alpha(w_p(n)+1)} - 1}{p^\alpha - 1}$$ falls Nenner $\neq 0$, also z.B. für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Denn $$\sigma_\alpha(p^k) = 1 + p^\alpha + p^{2\alpha} + \dots + p^{k\alpha} = \frac{p^{\alpha(k+1)} - 1}{p^\alpha - 1}$$

$\sigma = \sigma_1$

$\tau = \sigma_0$, also $\tau(p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}) = (k_1+1)(k_2+1)\dots(k_r+1)$

F2: Ist $f$ multiplikativ, so gilt für jedes $n = \prod_p p^{\nu_p}$ die Formel

$$\sum_{d \mid n} f(d) = \prod_{p \mid n} \left(1 + f(p) + f(p^2) + \dots + f(p^{\nu_p})\right)$$

Bew. Beide Seiten sind multiplikativ $\ulcorner$ die linke wegen F1, die rechte nach Def. $\lrcorner$ Genügt also $n = p^\nu$. Dann klar.

Def. 2 Wir def'n multiplikative Fkt. $\mu$ durch (vgl. Bem. 2 zu Def. 1)

$$\mu(p^\nu) = \begin{cases} -1 & \text{für } \nu = 1 \\ 0 & \text{für } \nu > 1 \\ 1 & \text{für } \nu = 0 \end{cases}$$ Möbiusfunktion

Also: Hat $n$ die PFZ $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$, so

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r & \text{falls } k_1 = \ldots = k_r = 1\text{, d.h. } n \text{ quadratf.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

F3: Setze $\varepsilon(n) := \sum_{d|n} \mu(d)$, d.h. sei $\varepsilon$ die zu $\mu$ gehörige summatorische Fkt.

Dann gilt

$\varepsilon(n) = \left[\frac{1}{n}\right]$

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{für } n \neq 1 \end{cases}$$

Also ist $\varepsilon$ die charakteristische Fkt. zur Teilmenge $\{1\}$ von $\mathbb{N}$.

$\varepsilon$ ist vollständig multipl. (im Gegensatz zu $\mu$).

Bew. F2.

F4: Ist $f$ multiplikativ, so gilt

$$\sum_{d|n} \mu(d) f(d) = \prod_{p|n} (1 - f(p))$$

Bew. Anw. von F2 auf $\mu f$.

Def. 3 (Dirichlet-~~Faltung~~ Produkt): Für zahlenth. Fkt'n $f, g$ def'e $f*g$ durch

$$(f*g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\tfrac{n}{d}\right) = \sum_{\substack{a,b \in \mathbb{N} \\ ab = n}} f(a) g(b)$$

Es gelten

$f*g = g*f$, $(f*g)*h = f*(g*h)$, sowie

$\varepsilon * f = f * \varepsilon = f$ $\ulcorner$denn $(\varepsilon * f)(n) = \sum_{d|n} \varepsilon(d) f(\frac{n}{d}) = \varepsilon(1) f(n) = f(n)$ $\lrcorner$

Bem. Die Menge $R$ der zahlenth. Fkt'n $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ bilden, mit $+$ und $*$, einen kommutativen Ring mit Einselement $\varepsilon$.

F5: $f, g$ multipl. $\Rightarrow$ $f * g$ multipl.

(Verallgemeinerung von F1, wo $g = i_0$)

$(n_1, n_2) = 1$

Bew. $(f*g)(n_1 n_2) = \sum\limits_{d \mid n_1 n_2} f(d) g\left(\frac{n_1 n_2}{d}\right) \overset{!}{=} \sum\limits_{d_1 \mid n_1, d_2 \mid n_2} f(d_1 d_2) g\left(\frac{n_1 n_2}{d_1 d_2}\right) =$

$\sum\limits_{d_1 \mid n_1, d_2 \mid n_2} f(d_1) f(d_2) g\left(\frac{n_1}{d_1}\right) g\left(\frac{n_2}{d_2}\right) = \sum\limits_{d_1 \mid n_1} f(d_1) g\left(\frac{n_1}{d_1}\right) \cdot \sum\limits_{d_2 \mid n_2} f(d_2) g\left(\frac{n_2}{d_2}\right) =$

$(f*g)(n_1) \cdot (f*g)(n_2)$.

F3 sagt: $\mu * i_0 = \varepsilon$,

$\mu$ und $i_0$ invers bzgl. der Multipl. $*$.

Satz 1 (Möbius-Umkehrformeln): Für zahlenth. Fkt'n $f, g$ sind folgende Aussagen äquivalent:

allen

(i) $g(n) = \sum\limits_{d \mid n} f(d)$, d.h. $g$ summ. Fkt. zu $f$, d.h. $g = f * i_0$

(ii) $f(n) = \sum\limits_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d)$, d.h. $f = g * \mu$

Bew. (i) $\Rightarrow$ (ii): $g = f * i_0$, $\Rightarrow g * \mu = (f * i_0) * \mu = f * (i_0 * \mu) \overset{F3}{=}$
$f * \varepsilon = f$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $f = g * \mu$, $\Rightarrow f * i_0 = g * \mu * i_0 \overset{F3}{=} g * \varepsilon = g$.

<u>Korollar:</u> Jede zahlenth. Fkt. $g$ ist summatorische Fkt. genau einer Fkt. $f$. Dabei gilt:

$$g \text{ multipl.} \Leftrightarrow f \text{ multipl.}$$

Ist $g$ multipl., so gilt für $f$ außerdem noch die Formel

$n = \prod_p p^{\nu_p}$

$$f\Big(\prod_p p^{\nu_p}\Big) = \prod_{p|n} \Big(g(p^{\nu_p}) - g(p^{\nu_p - 1})\Big)$$

<u>Bew.</u> 1) $g$ gegeben. Def'e $f$ durch (ii). Nach Satz 1 gilt dann auch (i), also ist $g$ summ. Fkt. zu $f$.

2) Gilt (i), so auch (ii); also ist $f$ eindeutig.

3) $f$ multipl. $\xRightarrow{F1}$ $g$ multipl. $\xRightarrow{F5}$ $f = g * \mu$ multipl.

Ferner nach (ii): $f(p^\nu) = \sum_{d|p^\nu} \mu(d) g\left(\frac{p^\nu}{d}\right) =$

$$\underset{1}{\underset{\parallel}{\mu(1)}} g(p^\nu) + \underset{-1}{\underset{\parallel}{\mu(p)}} g(p^{\nu-1}) + \underset{0}{\underset{\parallel}{\mu(p^2)}} g(p^{\nu-2}) + \dots$$

<u>Bem.</u> Zu jeder zahlenth. Fkt. $f$ mit $f(1) \neq 0$ gibt es (eind. bestimmte) Fkt. $h$ mit $f * h = h * f = \varepsilon$.

<u>Bew.</u> ÜA [aus Def. per Induktion]

<u>Bem.</u> Nach Kor. zu Satz 1 gibt es zu $i(n) = n$ eind. best. Fkt. $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ mit

(1) $\quad \sum_{d|n} \varphi(d) = n \quad$ ; und es gilt weiter

(2) $\quad \varphi$ ist multipl.

(3) $\varphi(n) = \sum_{d|n}' \mu(\frac{n}{d}) d = \sum_{d|n}' \mu(d) \frac{n}{d} = n \sum_{d|n}' \frac{\mu(d)}{d}$

(4) $\varphi(\prod_p p^{\nu_p}) = \prod_{p|n} (p^{\nu_p} - p^{\nu_p - 1})$ $\quad$ [mit $n = \prod_p p^{\nu_p}$]

bzw.

$$\varphi(n) = \prod_{p|n} (p^{w_p(n)} - p^{w_p(n)-1}) = n \prod_{p|n} (1 - \tfrac{1}{p})$$

speziell

$$\varphi(p^\nu) = p^\nu - p^{\nu-1} \qquad (\nu \geq 1)$$

(5) $\varphi(n) = \# \{ k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n \text{ mit } (k,n) = 1 \}$

Bew. von (5): Setze rechte gleich $\tilde{\varphi}(n)$. Es ist

$$n = \sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{d|n}' \Big( \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=d}}^{n} 1 \Big) = \sum_{d|n}' \tilde{\varphi}(\tfrac{n}{d}), \text{ denn: }$$

$$(k,n) = d \Leftrightarrow (\tfrac{k}{d}, \tfrac{n}{d}) = 1;$$

Somit $n = \sum_{d|n}' \tilde{\varphi}(d)$, $\xRightarrow[\text{von } \varphi, \text{ s.o.}]{\text{Eindeutigkeit}}$ $\tilde{\varphi} = \varphi$.

<u>F6:</u> Sei $f$ multiplikativ. Dann:

$f$ vollständig multipl. $\Leftrightarrow$ $\mu f * f = \varepsilon$.

<u>Bew.</u> ÜA