<u>Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen:</u> Sei G eine endliche abelsche Gruppe $\neq 1$. Dann gibt es natürliche Zahlen

(1) $e_1, e_2, \dots, e_s > 1$ mit $e_{j+1} \mid e_j$ $(1 \le j \le s-1)$,

so daß

(2) $G \simeq \mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/e_s\mathbb{Z}$

(direktes Produkt zyklischer Gruppen). Die $e_1, \dots, e_s$ sind [durch (2) und (1)] eindeutig bestimmt. Es gilt $e_1 = e(G)$.

<u>Bew.</u> Existenz: Induktion nach $\mathrm{ord}(G)$. Nach F1 existiert ein $\omega \in G$ mit $\mathrm{ord}(\omega) = e(G) =: e$. Setze $H := \langle \omega \rangle$.

$\overline{G} := G/H$ Restklassengruppe nach H (vgl. S. 73a)

$\# \overline{G} = \dfrac{\# G}{\# H} < \# G$. $G \to \overline{G}$, $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ Restklassenabb.

Per Induktion

(3) $\overline{G} = \langle \overline{\omega_2} \rangle \times \dots \times \langle \overline{\omega_s} \rangle$ $\quad e_i = \mathrm{ord}(\overline{\omega_i})$, $e_{i+1} \mid e_i$ für $2 \le i \le s-1$.

$e_i \mid \mathrm{ord}(\omega_i)$ [denn $\overline{\omega_i}^{\mathrm{ord}(\omega_i)} = \overline{1}$]

$\omega_2^{e_2} \in \langle \omega \rangle$, $\Rightarrow \omega_2^{e_2} = \omega^j$

$$\frac{\mathrm{ord}(\omega_2)}{e_2} \overset{\text{Bem. 1}}{=} \mathrm{ord}(\omega_2^{e_2}) = \mathrm{ord}(\omega^j) \overset{\text{Bem. 1}}{=} \frac{e}{(e,j)}, \overset{\mathrm{ord}(\omega_2) \mid e}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{e}{(e,j)} \,\Big|\, \frac{e}{e_2}, \Rightarrow e_2 \mid (e,j), \Rightarrow e_2 \mid j, \Rightarrow$$

$$j = e_2 k, \; k \in \mathbb{Z}.$$

$\omega_2' := \omega_2 \omega^{-k}$. Dann $\overline{\omega_2'} = \overline{\omega_2}$ und $\omega_2'^{\,e_2} = \omega_2^{e_2} \omega^{-k e_2} = \omega^j \omega^{-j} = 1$,

$\Rightarrow$ $\mathrm{ord}(\omega_2') \mid e_2 = \mathrm{ord}(\overline{\omega_2}) = \mathrm{ord}(\overline{\omega_2'}) \mid \mathrm{ord}(\omega_2')$, also $\mathrm{ord}(\omega_2') = e_2$.

analog für ω_j mit bel. $j \ge 2$. Daher o.E.

(3') $\bar{G} = \langle \bar{\omega}_2 \rangle \times \dots \times \langle \bar{\omega}_s \rangle$ mit $e_i = \mathrm{ord}(\bar{\omega}_i) \overset{!}{=} \mathrm{ord}(\omega_i)$, $e_{i+1} \mid e_i$ (alle $i \geq 2$)

Klar ist – mit $\omega_1 := \omega$ –

$$G = \langle \omega_1 \rangle \langle \omega_2 \rangle \cdots \langle \omega_s \rangle$$, und daher

Z.z. Das Produkt ist direkt.

Sei $\omega_1^{a_1} \omega_2^{a_2} \cdots \omega_s^{a_s} = 1$. Z.z. $\omega_i^{a_i} = 1$ für alle $1 \leq i \leq s$.

$$\Downarrow$$

$$\bar{\omega}_2^{a_2} \cdots \bar{\omega}_s^{a_s} = 1 \overset{(3)}{\Longrightarrow} \bar{\omega}_2^{a_2} = 1, \dots, \bar{\omega}_s^{a_s} = 1 \xRightarrow[\text{für } i \geq 2]{\mathrm{ord}(\omega_i) = \mathrm{ord}(\bar{\omega}_i)}$$

$$\omega_2^{a_2} = 1, \dots, \omega_s^{a_s} = 1, \overset{\text{Vor.}}{\Longrightarrow} \omega_1^{a_1} = 1.$$

Eindeutigkeit: Sei also

$$G \simeq \mathbb{Z}/e_1' \times \underbrace{\mathbb{Z}/e_2' \times \dots \times \mathbb{Z}/e_{s'}'}_{H'} \simeq \mathbb{Z}/e_1 \times \underbrace{\mathbb{Z}/e_2 \times \dots \times \mathbb{Z}/e_s}_{H}$$

mit entspr.'n e_i', $1 \leq i \leq s'$. $e_1' = e(G) = e_1$, also $e_1' = e_1$.

additive Schreibweise für G

$$e_2 G \simeq e_2(\mathbb{Z}/e_1) \times e_2 H' \simeq e_2(\mathbb{Z}/e_1) \times e_2 H \quad , \quad e_2 H = 0$$

Ordnungsvergleich liefert $e_2 H' = 0$, also $\underset{e_2'}{\underset{\|}{e(H')}} \mid e_2$

Aus Symmetriegründen: $e_2' = e_2$.

$e_3 G \simeq \dots, \dots \Longrightarrow e_3' = e_3$ u.s.w.