Zentralübung zu Blatt 8

$\boxed{1}$ Der implizite Funktionensatz

Vor.: Sei $F: U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$, $U_1 \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$,
F stetig diff'bar, $(a,b) \in U_1 \times U_2$ mit $F(a,b) = 0$
und $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ invertierbar.

Beh.: Dann gibt es offene Teilmengen $V_1 \subseteq U_1$, $V_2 \subseteq U_2$,
$a \in V_1$, $b \in V_2$, und eine st. db. Fkt. $g: V_1 \to V_2$,
$g(a) = b$, so dass für alle $(x,y) \in V_1 \times V_2$:
$\left(F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x) \right)$

Es gilt: $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$
für $(x,y) = (x, g(x)) \in V_1 \times V_2$,
insb. $\frac{\partial g}{\partial x}(a,b) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(a,b)$

Bezeichnungen: $\frac{\partial g}{\partial x} = \left(\frac{\partial g_\mu}{\partial x_j}\right)_{\substack{1 \le \mu \le m \\ 1 \le j \le k}} \in \mathbb{R}^{m \times k}$,

$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le k}} \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$

Aufgabe 31

a) **Vor.:** $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, y) := x_1^2 + x_2^2 + y^2 - 1$,
$a := (0,0)$, $b := 1 \leadsto f(a,b) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 2 \cdot 1 \neq 0$ ✓

Beh.: Die Abb. $g: V_1 \to V_2$, $V_1 := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$,
$V_2 :=]0, \infty[$, $g(x_1,x_2) := \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ erfüllt die Beh. von $\boxed{1}$

Bew.: Aus $f(x_1,x_2,y) = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + y^2 = 1$
$\Leftrightarrow y^2 = 1 - x_1^2 - x_2^2$ erhält man, falls $1 - x_1^2 - x_2^2 > 0$ ist,
die Lösungen $y = \pm\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ für $g(x)$.

Nahe $(a,b) = (0,0,1)$ erhalten wir die pos. Lsg. $y = +\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$,
also ist $g(x_1,x_2) := \sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$ ist stetig db. Abb. $g: V_1 \to V_2$
(V_1 ist maximal offen mit $a=(0,0)\in V_1$, V_2 max. offen mit
$b=1\in V_2$ so, dass g auf V_1 eind. eind.) $\square$

Bem.: g ordnet einem (x_1,x_2) der offenen Einheitskreisscheibe V_1 das $y>0$ zu, für das (x_1,x_2,y) auf der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ liegt.

b) Vor.: $U \subset \mathbb{R}$, $0\in U$, $u,v: U\to\mathbb{R}$,
$u(0)=v(0)=0$, und für $u(x), v(x)$ gelten

$$u+2u^2+v^2+x^2+2v-x=0$$
$$xuv+e^u\sin(v+x)=0$$

Beh.: $u'(0)=3$, $v'(0)=-1$, u,v stetig diff'bar.

Bew.: Wollen das nichtlineare Glgs-system "nach u,v auflösen"
der Satz $\boxed{1}$ sichert die Existenz von u und v.
Schreiben $f(x,u,v) := \left(u+2u^2+v^2+x^2+2v-x,\ xuv+e^u\sin(v+x)\right)$,
also $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, betrachten nahe $(0,0,0)=0$
(beachte $f(0)=0$), es ist

$$\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(x,u,v) = \begin{pmatrix} 1+4u & 2v+2 \\ xv+e^u\sin(u+x) & xu+e^u\cos(v+x)\end{pmatrix},$$

also $\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(0,0,0) = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, ist invertierbar.

Nach $\boxed{1}$ ex. u, v nahe x. $\rightsquigarrow$ $g: V_1\to\mathbb{R}^2$
Deren Abl. sind

$$\begin{pmatrix}u'(0)\\ v'(0)\end{pmatrix} = -\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(0,0,0)\right)^{-1}}_{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}} \cdot \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)}_{\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}},$$

denn $\frac{\partial f}{\partial x}(x,u,v) = (2x-1,\ uv+e^u\cos(v+x))$,
also $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = (-1,1)$,

also $\begin{pmatrix}u'(0)\\ v'(0)\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$. $\square$

2 Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit

Vor.:

$U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}^n$ stetig diff'bar,

$a \in U$, $b := f(a)$, $Df(a)$ invertierbar.

Beh.: Dann gibt es in $\mathbb{R}^n$ offene Teilmengen $U_0 \subseteq U$, $V_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $a \in U_0$, $b \in V_0$ so, dass

1) f die Menge U_0 bijektiv auf V_0 abbildet,
2) die Umkehrabb. $g = f^{-1}: V_0 \to U_0$ ist st. db. mit $Dg(b) = (Df(a))^{-1}$

[Ferner auch so, dass $Df(x)$ invertierbar für alle $x \in U_0$, und: $\forall y \in V_0: Dg(y) = (Df(g(y)))^{-1}$]

Aufgabe 32

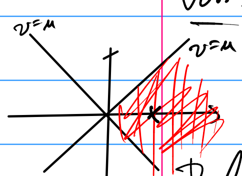
Vor.: $f: U \to \mathbb{R}^n$ lokal umkehrbar auf $U \subset \mathbb{R}^n$,

d.h. $\forall x \in U$: f lokal umkehrbar in x

$:\Leftrightarrow$ f stetig diff'bar, $Df(x)$ inv'bar für alle $x \in U$.

Def.: Die für $U_0 \subseteq U$, $U_0 \subset \mathbb{R}^n$, gebildete Umkehrfunktion $g: f(U_0) \to U_0$ heißt ein Zweig von f^{-1} auf $f(U_0)$.

Vor.: $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) := (x^2+y^2, x^2-y^2)$,



$V := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u+v > 0, u-v > 0\}$
$\quad v > -u$ & $v < u$

Beh.: 1) Die Funktionen $G_i: V \to U_i$, $1 \le i \le 4$,

Def. der U_i s.u., $G_1(u,v) := \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{u+v}, \sqrt{u-v})$,

$G_2(u,v) := \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{u+v}, \sqrt{u-v})$, $G_3(u,v) := \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{u+v}, -\sqrt{u-v})$,

$G_4(u,v) := \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{u+v}, -\sqrt{u-v})$ sind Zweige von F^{-1} auf V.

2) Nahe $(1,0) \in V$ wird G_i approximiert durch die affine Transformation $L_i(u,v) := G_i(1,0) + DG_i(1,0) \cdot \binom{u}{v}$,

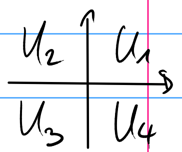
nämlich $L_1(u,v) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2+u+v, 2+u-v)$, ...

Bew.: Haben: F lokal umkehrbar auf $\mathbb{R}^2 \setminus A =: U$,

$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0\}$ das Achsenkreuz,

d.h. F ist diffbar, und $DF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$,

also $\det DF(x,y) = -8xy \neq 0$ genau für $xy \neq 0$, d.h. $(x,y) \notin A$.



Betr. die vier Zusammenhangskomponenten von U,

nämlich $U_1 := \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$, $U_2 := \mathbb{R}_{<0} \times \mathbb{R}_{>0}$,

$U_3 := \mathbb{R}_{<0} \times \mathbb{R}_{>0}$, $U_4 := \mathbb{R}_{<0} \times \mathbb{R}_{<0}$.

Laut $\boxed{2}$ stellt F auf jedem U_i eine bijektive Funktion dar mit Bild $F(U_i) \overset{!}{=} V$, $1 \le i \le 4$.

⌈ „$\subseteq$": $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 - y^2$ erfüllen $u + v = 2x^2 > 0$, $u - v = 2y^2 > 0$. ✓

„$\supseteq$": ist $u+v > 0$, $u - v > 0$, so folgt $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 - y^2$

mit $x := \pm\sqrt{\frac{u+v}{2}}$, $y := \pm\sqrt{\frac{u-v}{2}}$, mit $\pm$ so,

dass $(x,y) \in U_i$. ⌟

Auf U_i hat F die Umkehrfunktion $G_i : V \to U_i$, $1 \le i \le 4$,

wie angegeben, diese vier Fktn. G_i stellen demnach verschiedene Zweige von F^{-1}.

Zu 2): Aus $(u_i, v_i) := G_i(1,0) \in U_i$

folgt $(u_1, v_1) := \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $(u_2, v_2) := \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$,

$(u_3, v_3) := \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1)$, $(u_4, v_4) := \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

Also $DG_i(1,0) = \left(DF(u_i, v_i)\right)^{-1}$,

also $DG_1(1,0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,