Zentralübung zu Blatt 5, Analysis 2

Normen:

Wdh.: metrischer Raum: (X, d),

$d: X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, 1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x)$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$(\mathbb{R}^n, d_{eukl.})$,

$d_{eukl.}(x,y) := \|x-y\|_2$,

$z \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \|z\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}$ euklidische Norm

Normierter Raum: Sei X ein $\mathbb{R}$-VR (bzw. $\mathbb{C}$-VR),

$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, 1) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) $\forall v \in X: \|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$

3) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Ein normierter Raum ist ein metrischer Raum:

$(X, \|\cdot\|) \rightsquigarrow d(x,y) := \|x-y\|$

$\mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \|z\|_2 := \sqrt{\sum_i |z_i|^2}$

$\|z\|_1 := \sum_i |z_i|$

$\|z\|_\infty := \max_i |z_i|$

sei $p \geq 1 \rightsquigarrow \|z\|_p := \sqrt[p]{\sum_i |z_i|^p}$

Beh.: Je zwei Normen $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ des $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent,
d.h. $\exists\, \alpha, \beta > 0 : \quad \alpha \cdot \|x\| \le \|x\|' \le \beta \cdot \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 19

Vor.: $f : S^{n-1} := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1 \} \to \mathbb{R}$ stetig,
$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei geg. durch

$$F(x) := \begin{cases} f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \cdot \|x\|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Beh.: F ist in $0 \in \mathbb{R}^n$ diff'bar $\Leftrightarrow \exists\, A \in \mathbb{R}^{1 \times n} : f(x) = A \cdot x$,
d.h. f ist linear.

Bew.: „$\Rightarrow$": Ist F diff'bar in 0, so ist

$$F(\xi) = F(0) + A \cdot \xi + \varphi(\xi),$$

wo $A = F'(0) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ und $\lim\limits_{\xi \to 0} \dfrac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$.

Dann ist $F(\xi) - A \cdot \xi = \varphi(\xi)$,
also

$$f\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right) - A \cdot \frac{\xi}{\|\xi\|} = \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} \xrightarrow{\xi \to 0} 0. \quad \otimes$$

Sei $v \in S^{n-1}$ fest. Dann gilt:

$$f(v) - A \cdot v \underset{\substack{\uparrow \\ v = \frac{t \cdot v}{t},\ t>0}}{=} f\left(\frac{tv}{t}\right) - A \cdot \frac{tv}{t} \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ stetig}}}{=} \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \left(f\left(\frac{tv}{t\|v\|}\right) - A \cdot \frac{tv}{t\|v\|} \right) = 0.$$

Also ist $f(v) = A v$, d.h. f ist lineare Abb. auf S^{n-1}.

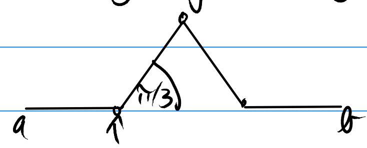
„$\Leftarrow$": Sei f linear, etwa $f(x) = Ax$. Dann: $F(x) = A \cdot \frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|$, also $F(x) = Ax$,
d.h. $F(x) = F(0) + Ax + 0 \rightsquigarrow$ Somit ist F diff'bar in 0 mit $F'(0) = A$. $\square$

Aufgabe 20

Vor.: ....

Beh.: Die Menge $T^n(I) \subseteq \mathbb{C}$ ist Bild einer injektiven Kurve $f_n : I \to T^n(I)$, so dass die f_n punktweise gegen eine nicht rektifizierbare Kurve $f : I \to \mathbb{C}$ konvergieren.

Bew.: 0. Beh.: Die $T^n(I)$ sind jeweils eine disjunkte Vereinigung von gleichlangen Strecken.



Die $f_n : I \to T^n(I)$ werden wie folgt definiert:

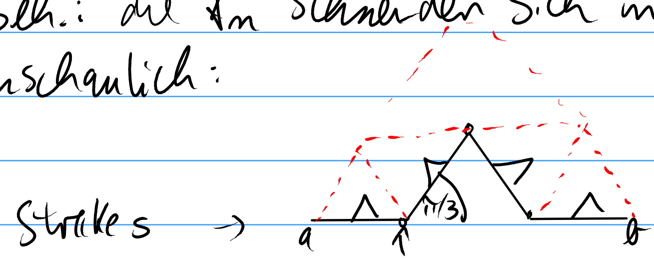
Ist $T^n(I) = \bigcup_{m=1}^{k} s_m$, so ist

$$f_n(t) := s_m(t), \text{ falls } t \in \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right], \quad 0 \le m \le k-1.$$

[Ist s_m eine Strecke mit Endpunkten a und b, so sei $s_m(t) := a + t(b-a) \in \mathbb{C}$.]

1. Beh.: die f_n schneiden sich nicht selbst.

Anschaulich:



Wird T auf S angewendet, bleibt der neue Streckenzug innerhalb des auf S errichteten gleichseitigen Dreiecks.
→ "Hülldreiecke"

Nach einer Op. T sind die Hülldreiecke auf den vier neuen Strecken p.w. disjunkt und im alten Hülldreieck enthalten. Ein neuer Streckenzug kann daher nicht mit einem alten in Berührung kommen.

2. Beh.: Die f_n konvergieren punktweise gegen ein $f: I \to \mathbb{C}$.

$\leadsto$ ε-δ-Stetigkeit von f zeigen:
(in jedem ε-Ball um ein $f(t_0)$ liegen die Funktionswerte $f(t)$ eines δ-Intervalls um t_0 ...)

3. Beh.: f ist nicht rektifizierbar.

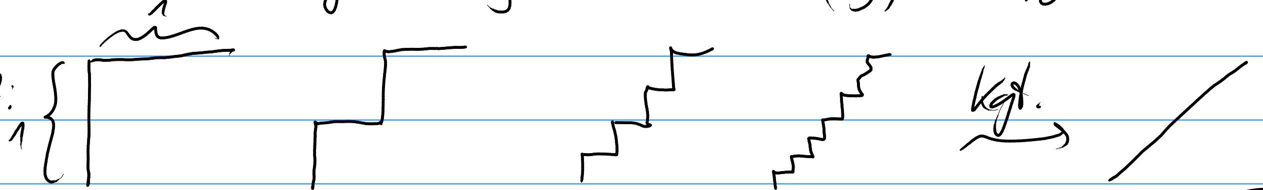
Bew.: z.z.: $\forall L > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists$ Unterteilung von I mit Feinheit $< \delta$: $p_f(t) \geq L$.

Dazu sei $L > 0$, $\delta > 0$. Dann wähle $m \in \mathbb{N}$ mit $4^{-m} < \delta$ und $\left(\frac{4}{3}\right)^m > L$,
sowie die äquidistante Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{4^m} = 1$,
d.h. $t_k = \frac{k}{4^m}$, $0 \leq k \leq 4^m$, diese hat Feinheit $< \delta$.

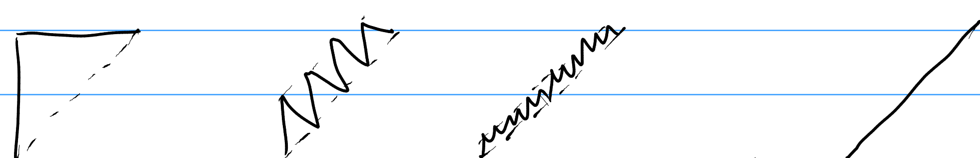
Dann sind die $f(t_k)$ gerade die Endpunkte der Strecken im Streckenzug von $T^{4^m}(I)$, diese Punkte liegen auf f.
Der Streckenzug hat die Länge $\left(\frac{4}{3}\right)^m > L$. □

Es reicht nicht die folgende Argumentation: $\left(\frac{4}{3}\right)^n \xrightarrow{n \to \infty} \infty$

Bsp.:



Länge 2 Länge 2 Länge 2 Länge 2 Länge $\sqrt{2}$



$\leadsto$ divergierend Längenfolge $\overset{\text{kgt}}{\leadsto}$ Länge $\sqrt{2}$