Zentralübung Analysis 2 zu Blatt 4

$f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$

$D_1 f(x_1, x_2) = x_2^2$, $D_2 f(x_1, x_2) = 2x_1 x_2$

$D_2 D_1 f(x_1, x_2) = 2x_2$, $D_1 D_2 f(x_1, x_2) = 2x_2$

Aufgabe 15

Vor.: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y = 0 \\ \dfrac{(x^2y + xy^2)\sin(x-y)}{x^2+y^2}, & \text{sonst} \end{cases}$

Beh.: f ist $2\times$ partiell diff'bar in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,

aber $(D_2 D_1 f)(0,0) \neq (D_1 D_2 f)(0,0)$.

Bew.: Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist

$$(1)\quad D_1 f(x,y) = \frac{(2xy + y^2)\sin(x-y) + (x^2y + xy^2)\cos(x-y)}{x^2+y^2} - \frac{2x(x^2y + xy^2)\sin(x-y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$(2)\quad D_2 f(x,y) = \frac{(2xy + x^2)\sin(x-y) - (x^2y + xy^2)\cos(x-y)}{x^2+y^2} - \frac{2y(x^2y + xy^2)\sin(x-y)}{(x^2+y^2)^2},$$

und die Differentiationsregeln (Quotientenregel, Kettenregel usw.) zeigen, dass auch die zweiten Abl. für $(x,y) \neq (0,0)$ ex.

Diese Formeln sind nicht für $(0,0)$ anwendbar, daher:

$$D_1 f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(f(x,0) - f(0,0)\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot(0-0) = 0,$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}\left(f(0,y) - f(0,0)\right) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}(0-0) = 0.$$

- Einsetzen von $y=0$ in (1) und (2) ergibt:

$$D_1 f(x,0) = 0, \quad D_2 f(x,0) = \sin x, \quad x \neq 0,$$

also

$$D_1^2 f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(D_1 f(x,0) - D_1 f(0,0)\right) = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = \underline{\underline{0}},$$

$$D_1 D_2 f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(D_2 f(x,0) - D_2 f(0,0)\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - 0}{x} = \underline{\underline{1}}.$$

- Einsetzen von $x=0$ in (1) und (2) ergibt:

$$D_1 f(0,y) = -\sin y, \quad D_2 f(0,y) = 0, \quad y \neq 0$$

also: $$D_2 D_1 f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}\left(D_1 f(0,y) - D_1 f(0,0)\right) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}(-\sin y - 0) = \underline{\underline{-1}},$$

$$D_2^2 f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}\left(D_2 f(0,y) - D_2 f(0,0)\right) = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = \underline{\underline{0}}.$$

Somit ist $D_1 D_2 f(0,0) = 1 \neq -1 = D_2 D_1 f(0,0)$.

$\square$

Aufgabe 16

Vor.: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $u, v \in \mathbb{R}$.
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) := f(a+ut, b+vt)$.

Beh.: g ist diff'bar in 0, $g'(0) = u \cdot D_1 f(a,b) + v \cdot D_2 f(a,b)$.

Bew.: $\frac{1}{t}(g(t) - g(0)) = ?$ lim für $t \to 0$?

Es gilt $g(t) - g(0) = f(a+ut, b+vt) - f(a,b)$

$$= f(a+ut, b) - f(a,b) + f(a+ut, b+vt) - f(a+ut, b)$$

Nach dem MWS (aus der Ana 1)
ex. $\xi \in]0, ut[$, $\eta \in]0, vt[$ so, dass dies

$$= D_1 f(a+\xi, b) \cdot ut + D_2 f(a+ut, b+\eta) \cdot vt$$ ist.

Dann ist
$$\frac{1}{t}(g(t) - g(0)) = u D_1 f(a+\xi, b) + v D_2 f(a+ut, b+\eta).$$

Mit $t \to 0$ gehen auch $\xi = \xi(t)$ und $\eta = \eta(t)$ gegen 0,
da f stetig diff'bar,
strebt dann der letzte Ausdruck gegen

$$u D_1 f(a,b) + v D_2 f(a,b).$$

Dies ist also $g'(0)$. $\square$

Bem.: Bestimmung von $g'(0)$ ist auch mit Kettenregel möglich.