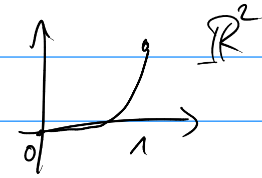
Zentralübung zu Blatt 3

Thema: Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Weg: stetige Abb. $f: I \to \mathbb{R}^n$, I Intervall

Kurve

$$f: [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$



$$g: [0,\tfrac{1}{2}] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} 2t \\ (2t)^2 \end{pmatrix} \leadsto g = f \circ \alpha$$

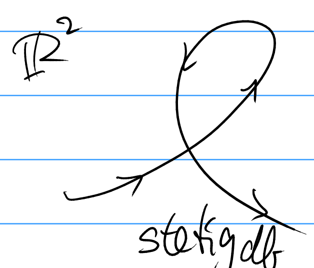
$$\alpha: [0,\tfrac{1}{2}] \to [0,1],\ \alpha(t) = 2t$$

$\leadsto$ Ä-Relation: f_1, f_2 Wege, $f_1: I_1 \to \mathbb{R}$, $f_2: I_2 \to \mathbb{R}$,

$f_1 \sim f_2 \;:\Longleftrightarrow\; \exists$ bij., mon. st. Abb. $\alpha: I_2 \to I_1$:

$$f_2 = f_1 \circ \alpha$$

Kurve: Ä-Klasse eines Weges



Def.: Kurve $f: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ rektifizierbar mit Länge $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall$ Unterteilungen
$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ mit Feinheit $< \delta$, d.h.

$$\underset{f(t_0)}{t_0},\ \underset{f(t_1)}{t_1},\ \underset{f(t_k)}{t_k}$$

$\max\{|t_i - t_{i-1}| \mid 1 \leq i \leq k\} < \delta$:

$$\Big| \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \| f(t_i) - f(t_{i-1}) \|}_{p_f(t_0,\dots,t_k) :=} - L \Big| < \varepsilon .$$

Bem.:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ nicht rektifizierbar

$\iff \forall\, L \in \mathbb{R}_{\geq 0}\ \exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists$ Unterteilung $a = t_0 < \dots < t_k = b$ mit Feinheit $< \delta$: $|p_f(t_0,\dots,t_k) - L| \geq \varepsilon$,

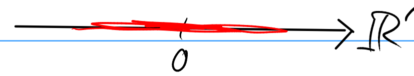
Kurz:

$\forall\, L > 0\ \exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists$ Untert. mit Feinh. $< \delta$: $\underbrace{|p_f(t_i) - L| \geq \varepsilon}_{p_f(t_i) - L \geq \varepsilon \text{ oder } -p_f(t_i) + L \geq \varepsilon,}$

Somit: f ist insbesondere dann nicht rektifizierbar, falls

$\forall\, L > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists$ Untert. mit Feinh. $< \delta$: $\underline{p_f(t_i) \geq L}$

- Kurve $f : I \to \mathbb{R}^n$ rektifizierbar, $J \subseteq I$ Teilintervall von I
  $\Rightarrow f_{|J} : J \to \mathbb{R}^n$ rektifizierbar
- Satz: $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig diff'bar
  $\Rightarrow f$ ist rekt'bar, $L = \int_a^b \|f'(t)\| dt$ die Länge von f
- Schnittwinkel: f, g reguläre Kurven, $f(t_1) = g(t_2)$
  $\leadsto \cos\vartheta = \dfrac{\langle f'(t_1), g'(t_2) \rangle}{\|f'(t_1)\| \cdot \|g'(t_2)\|}$



Aufgabe 11

Beh.: Die diff'bare Kurve $g: [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$ ist nicht rekt'bar.

Bew.: z.z.: $\boxtimes$, d.h.

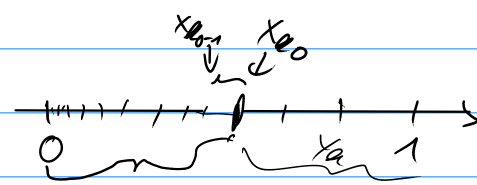
$\forall L > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists$ Untert. mit Feinh. $< \delta$: $p_g(t_i) \geq L$.

Betr. $x_k := \left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right)^{-1/2} \in [0,1]$,

für $k \in \mathbb{N}_0$, und $x_k \xrightarrow{k \to \infty} 0$, mon. fallend.

Sei $k_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$|x_{k_0} - x_{k_0-1}| < \delta.$$



Dann ist für $n > k_0$:

$\underset{t_0}{0} < x_n < x_{n-1} < \ldots < x_{k_0}$ eine Unterteilung von $[0, x_{k_0}]$ der Feinheit $< \delta$.

Weiter sei $x_{k_0} < y_1 < \ldots < y_m = 1$ eine Unterteilung von $[x_{k_0}, 1]$ der Feinheit $< \delta$ (etwa äquidistant).

Dies ergibt insg. eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 = x_n < t_2 < \ldots < t_\ell = 1$ von $[0,1]$ der Feinheit $< \delta$.

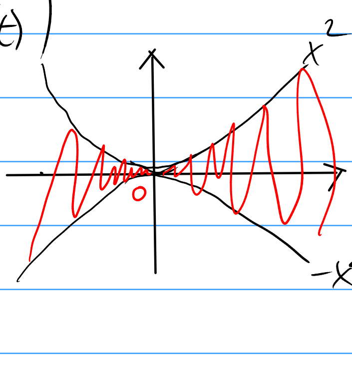
$(\ell = n - k_0 + 2 + m)$

Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\ell} |g(t_k) - g(t_{k-1})|$$
$$\geq \sum_{k=k_0+1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})|$$
$$= \sum_{k=k_0+1}^{n} \left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^{-1} + \left(\frac{\pi}{2} + \pi(k-1)\right)^{-1} \right)$$
$$\geq 2 \cdot \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi k} \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=k_0}^{n} \frac{1}{k+1}$$ divergiert für k_0 fest und $n \to \infty$,

d.h. wird $\geq L$, falls $n \in \mathbb{N}$ groß genug ist.

<u>Auch:</u> $G: [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}$



G nicht rekt'bar, denn:
mit derselben Unterteilung wie oben:

$$\sum_{k=1}^{\ell} \|G(t_k) - G(t_{k-1})\|$$
$$= \sum_{k=k_0+1}^{n} \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} x_k - x_{k-1} \\ g(x_k) - g(x_{k-1}) \end{pmatrix} \right\|}_{\sqrt{\underbrace{(x_k - x_{k-1})^2}_{\geq 0} + (g(x_k) - g(x_{k-1}))^2} \geq |g(x_k) - g(x_{k-1})|} \geq \sum_{k=k_0+1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})|$$ divergiert, s.o.,

Aufgabe 12 (Peano-Kurve im Dreieck Δ)

Sei $\Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$, Flächeninhalt: $A(\Delta) = \frac{1}{2}$.

(i) Def. der n-ten Zerlegung: Möchten $\Delta = \bigcup_{j=1}^{2^n} \Delta_j^n$,
die Δ_j^n gleichschenklig & rechtwinklig,
$A(\Delta_j^n) = 2^{-n-1}$, mit a) $\Delta_j^n = \Delta_{2j}^{n+1} \cup \Delta_{2j-1}^{n+1}$, $1 \leq j \leq 2^n$,
b) Δ_j^n und Δ_{j+1}^n haben gemeinsame Seite, $1 \leq j \leq 2^n - 1$.

Def. nun rekursiv eine Zerlegung von Δ:

- Im 1-ten Schritt $n=1$ setze $\Delta_1^1 := \Delta \cap \{(x,y) \mid y \leq x\}$
$\Delta_2^1 := \Delta \cap \{(x,y) \mid y \geq x\}$ } gleichschenklig & rechtwinklig

also $\Delta = \Delta_1^1 \cup \Delta_2^1$, $A(\Delta_j^1) = \frac{1}{4}$ für $j = 1,2$.
Die gemeinsame Seite von Δ_1^1 und Δ_2^1 ist $\Delta \cap \{(x,x)\}$.

- Sei im n-ten Schritt eine n-te Zerlegung konstruiert.
Im (n+1)-ten Schritt definiere $\Delta_1^{n+1}, \dots, \Delta_{2^{n+1}}^{n+1}$ folgendermaßen:
Man halbiere das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck Δ_1^n in zwei gleichschenklige rechtwinklige Δ_2^{n+1} und Δ_1^{n+1} mit gemeinsamer Seite.

Ebenso Δ_2^n in $\Delta_3^{n+1}, \Delta_2^{n+1}$, dann Δ_3^n in $\Delta_4^{n+1}, \Delta_3^{n+1}$ usw.
Dadurch erfüllen auch die Δ_j^{n+1} die Bedingungen a) & b),
und es ist $A(\Delta_j^{n+1}) = \frac{1}{2} \cdot 2^{-n-1} = 2^{-n-2}$. ✓

Def. nun $f: I \to \mathbb{R}^2$ durch $f(t) := (x,y)$ mit $\{(x,y)\} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{k_n}^n$
für $\{t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{k_n}^n$, d.h. $t \in I$ def. eine Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, durch die ein Punkt $(x,y) \in \Delta$ durch $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{k_n}^n$ def. wird.
Denn die Δ_j^n sind abgeschl., und wegen ⊛ gilt $k_{n+1} \in \{2k_n, 2k_n - 1\}$,
so dass $\Delta_{k_{n+1}}^{n+1} \subseteq \Delta_{k_n}^n$ folgt, also ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{k_n}^n \neq \emptyset$.

Wegen dem Schachtelungsprinzip der Vorlesung ex. dann genau ein Punkt (x,y) in $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{k_n}^n$, dieser ist also eindeutig definiert und f somit wohldefiniert.

<u>Beh.:</u> Es gilt $f(I) = \Delta$

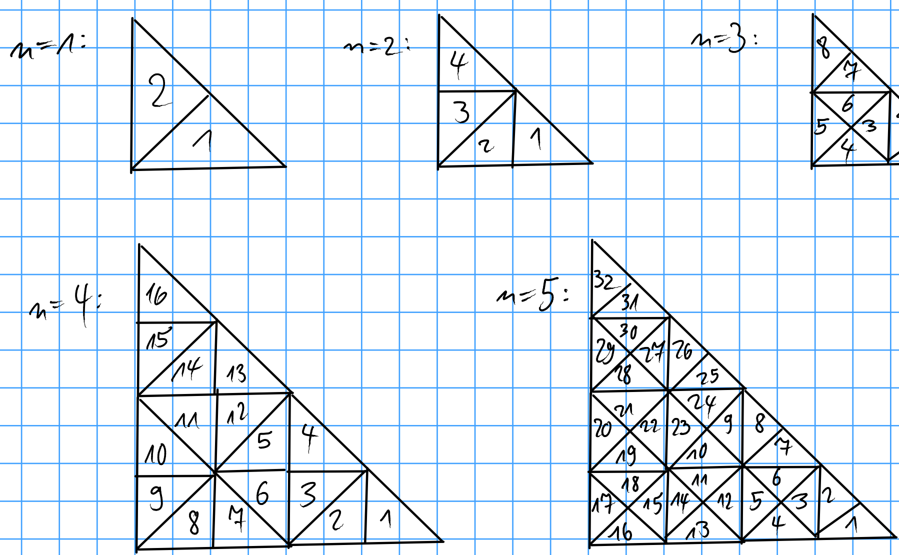
<u>Bew.:</u> Sei $(x,y) \in \Delta$ beliebig. Def. dazu eine Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ durch

$$k_1 := \begin{cases} 1, & \text{falls } (x,y) \in \Delta_1^1 \\ 2, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad k_{n+1} := \begin{cases} 2k_n - 1, & \text{falls } (x,y) \in \Delta_{2k_n-1}^{n+1}, \\ 2k_n, & \text{sonst.} \end{cases}$$

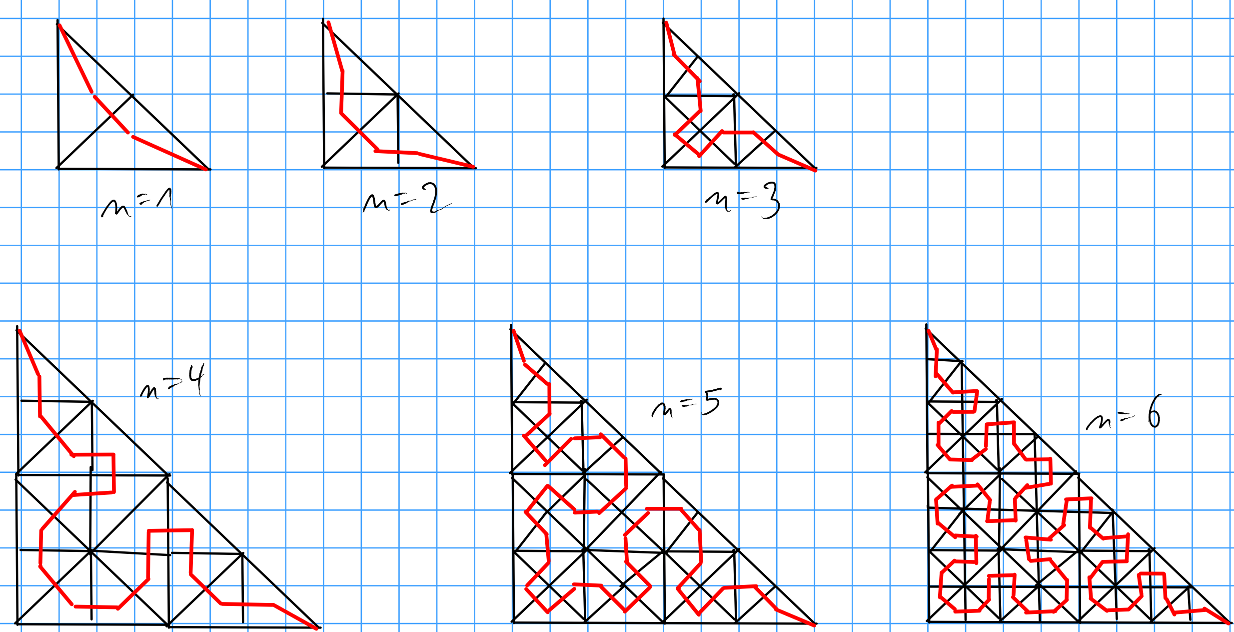
Für die so def. Folge gilt $k_{n+1} \in \{2k_n, 2k_n - 1\}$, also ist $I_{k_{n+1}}^{n+1} \subseteq I_{k_n}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gibt ein $t \in I$ mit $\{t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{k_n}^n$, d.h. es ist also $f(t) = (x,y)$. Da $(x,y) \in \Delta$ bel. war, folgt $f(I) = \Delta$. $\square$

<u>Bem.:</u> Die Abb. f ist also surjektiv, muss aber nicht injektiv sein, da auch andere Folgen $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der geforderten Art definierbar sind, die zu einem anderen Urbild t führen können.

Skizze der Δ-Zerlegung und zeichnerische Approximation von f durch rektifizierbare Kurven:



usw.



usw.