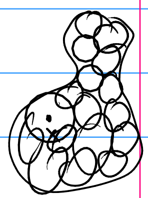
Hörsaal-Übung:

Bespr. Blatt 2: X metr. Raum



$U \subseteq X$ offen $:\Leftrightarrow \forall x \in U\ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq U$

$:\Leftrightarrow: U \overset{\circ}{\subset} X$

$A \subseteq X$ abg. $:\Leftrightarrow X \setminus A \subseteq X$ offen

$\Leftrightarrow X \setminus A \overset{\circ}{\subset} X$

Seien X, Y metr. Räume.

$f : X \to Y$ stetig $\Leftrightarrow \forall V \overset{\circ}{\subset} Y : f^{-1}(V) \overset{\circ}{\subset} X$

Heine-Borel: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ Kompakt $\Leftrightarrow K \subseteq \mathbb{R}^n$ abg. und beschr.

Bsp. zu Aufg. 6:

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D := [0,1[$ weder offen noch abg. in $\mathbb{R}$

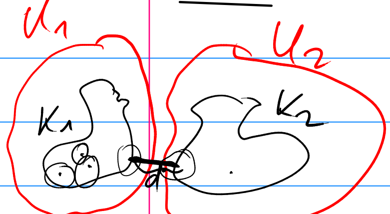
$f(x) := 1$

$\rightsquigarrow f^{-1}(\underbrace{\{1\}}_{\text{abg.}}) = [0,1[= D \subseteq D$ abg. in D, aber nicht in $\mathbb{R}$

Aufgabe 7

Vor.: X metr. Raum, $K_1 \subseteq X$, $K_2 \subseteq X$ Kompakte Teilmengen, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$.

Beh.: $\exists U_1, U_2 \overset{\circ}{\subset} X$, $K_1 \subseteq U_1$, $K_2 \subseteq U_2$: $U_1 \cap U_2 = \emptyset$



Bew.: Für metr. Räume: K_1 Kp. und K_2 abg., $K_1 \cap K_2 = \emptyset \Rightarrow d := \operatorname{dist}(K_1, K_2) > 0$ (vgl. Vorlesung).

$:= \inf\{d(x_1, x_2) \mid x_i \in K_i,\ i = 1,2\}$

Dann setze $U_i := \bigcup_{x \in K_i} B_{d/3}(x) \subset X, \quad i=1,2.$

Klar: $K_i \subseteq U_i, \quad i=1,2.$

Noch z.z.: $U_1 \cap U_2 = \emptyset.$

⌈ Sonst: $z \in U_1 \cap U_2 \leadsto \exists x_i \in K_i : z \in B_{d/3}(x_i), i=1,2.$

Dann: $d(x_1,x_2) \leq d(x_1,z) + d(z,x_2)$

$$\leq \frac{d}{3} + \frac{d}{3} = \frac{2}{3}d < d,$$

↯ zur Def. von d als $\mathrm{dist}(K_1,K_2)$. ⌋

□

Bem.: Beh. gilt auch für top. Räume, die hausdorffsch.

Aufgabe 8

Vor.: X metr. Raum, $M \subseteq X$.

Def.: $\bar{M} := \{ a \in X \mid \exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}}, \forall k: x_k \in M : x_k \xrightarrow{k\to\infty} a \}$

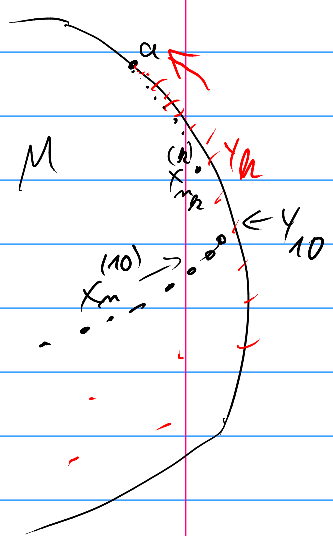
die abg. Hülle / der Abschluss von M.

(a) **Beh.:** $\overline{M} \subseteq X$ abg.

Bew.: Wir zeigen Kriterium von Satz 0.5, d.h.

Beh.: $\forall (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\overline{M}$, $y_k \to a \in X \Rightarrow a \in \overline{M}$

Bew. dazu:



Sei $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\overline{M}$ mit $y_k \to a \in X$.

Laut Def. von $\overline{M}$ gibt es für jedes $y_k \in \overline{M}$ eine Folge

$$(x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } M \text{ mit } x_n^{(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{} y_k .$$

Für k fest wähle $x_{n_k}^{(k)}$ so (d.h. $n_k \in \mathbb{N}$ so groß), daß $|x_{n_k}^{(k)} - y_k| < \frac{1}{k}$.

Für $\varepsilon > 0$ wähle k_0 so groß, daß $|y_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $k \geq k_0$, und k_1 so groß, daß $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \geq k_1$, für alle $k \geq \max\{k_0, k_1\}$ ist

$$|x_{n_k}^{(k)} - a| \leq |x_{n_k}^{(k)} - y_k| + |y_k - a|$$

$$\leq \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon .$$

Somit: $\underbrace{x_{n_k}^{(k)}}_{\in M} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$, die $x_{n_k}^{(k)} \in M$.

Also ist $a \in \overline{M}$ wegen Def. von $\overline{M}$. □

(b) **Beh.:** $\overline{M} = \bigcap \{A \subseteq X \mid M \subseteq A \text{ und } A \subseteq X \text{ abg.}\}$

$$= \bigcap_{\substack{A \subseteq X \text{ abg.} \\ M \subseteq A}} A$$

$\subseteq$, ?

Bew.: „$\supseteq$": Klar, da $A=\overline{M}$ abg. nach a) ist bei der Schnittmengenbildung auf der r.S. enthalten.

„$\subseteq$": $a\in\overline{M} \Rightarrow \exists (x_n)\subseteq M: x_n \to a$.

Sei $A\subseteq X$ abg., $M\subseteq A$ (d.h. A bel. mit dieser Eigensch., z.z.: $a\in A$, dann ist a auch im Schnitt aller dieser A.).

Die (x_n) liegen alle in M, also in A.

Weil A abg., folgt mit Satz 0.5: $a\in A$. ✓ □

(c) <u>Beh.:</u> M abg. $\Longleftrightarrow \overline{M}=M$

<u>Bew.:</u> „$\Leftarrow$": Klar, da $\overline{M}$ abg. wegen a),

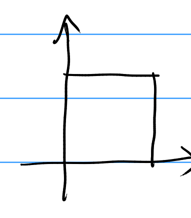
„$\Rightarrow$": wegen b) ist

$$M \underset{\substack{\uparrow \\ \text{klar}}}{\subseteq} \overline{M} = \bigcap_{\substack{A\subseteq X \text{ abg.} \\ M\subseteq A}} A \subseteq M,$$

also ist $M=\overline{M}$. □

$\leftarrow$ ($A=M$ ist hier dabei)

$\to \overline{M}$ Bsp.: $M=[0,1]\times[0,1]\subseteq\mathbb{R}^2 \Rightarrow \overline{M}=M$



Def.: $\mathring{M} := X\setminus(\overline{X\setminus M})$ das <u>Innere von M</u>

(d) <u>Beh.:</u> $\mathring{M}$ ist offen

<u>Bew.:</u> $\mathring{M} := X\setminus(\overline{X\setminus M})$ ist offen in X, da $\overline{X\setminus M}$ abg. (laut a)). □

Def.: $\partial M := \overline{M}\setminus\mathring{M}$ der <u>Rand von M</u>

(e) <u>Beh.:</u> ∂M ist abg.

Bew.: $\partial M = \overline{M}\setminus\mathring{M} = \overline{M}\setminus(X\setminus(\overline{X\setminus M})) = \overline{M}\cap\overline{X\setminus M}$ abg. in X.

$[x\notin X\setminus(\overline{X\setminus M}) \Leftrightarrow x\in\overline{X\setminus M}]$

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$: Was ist $\overline{\mathbb{Q}}$, $\mathring{\mathbb{Q}}$, $\partial \mathbb{Q}$?

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \quad \mathring{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \left(\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\right) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$$

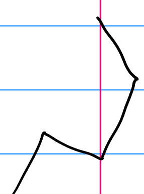
$$\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \overset{!}{=} \mathbb{R},$$

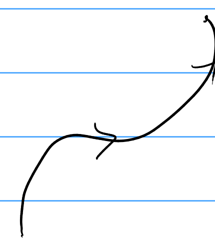
denn
$$\begin{cases} a \in \mathbb{Q} \Rightarrow \overbrace{a + \frac{\sqrt{2}}{n}}^{\in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \xrightarrow{n\to\infty} a \Rightarrow a \in \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \\ a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow \underbrace{a + \frac{1}{n}}_{\in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \Rightarrow a \in \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \end{cases}$$

$$\partial \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathring{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$$

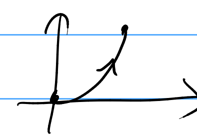
Kurve

Weg: stetige Abb. $I \to \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall





Bsp.: $f: [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \binom{t}{t^2}$



$g: [0,\frac{1}{2}] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \binom{2t}{(2t)^2}$

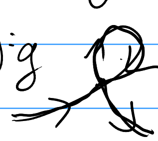
$\tilde{A}$-Rel. auf Wegen: f_1, f_2 Wege, $f_1: I_1 \to \mathbb{R}$, $f_2: I_2 \to \mathbb{R}$

$f_1 \sim f_2 :\Leftrightarrow \exists$ bijektive, mon. st. Abb $\alpha: I_2 \to I_1$: $f_1 \circ \alpha = f_2$

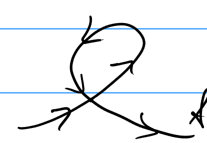
Kurve: $\tilde{A}$-Klasse eines Weges

Weg: g

[g]



Weg:



f

Kurve $\rightsquigarrow [f]$

Zu: <u>Aufgabe 9</u>

a) $f: I \to \mathbb{R}^n$, $f'(a) = ?$, Tangente an Kurve in $f(a)$?

(i) $f: [0,2] \to \mathbb{R}^4$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t \\ t^2 \\ t^3 - t \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad f'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ 2t \\ 3t^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$a = 1$

$$\rightsquigarrow \quad f'(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tangentenglg.: $g(t) = f(1) + t \cdot f'(1) = \ldots$

(ii) Kurve im $\mathbb{R}^3$, die Schnitt von $x+y+z=3$ und $x^2 - y^2 + 2z^2 = 2$ ist, in $f(a) = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$:

$x = t \rightsquigarrow y = 3 - t - z$) und in Flächenglg. einsetzen, nach z aufl.

$$f(t) = (t, 3 - t - z(t), z(t))^T$$

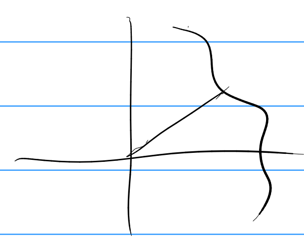
b) $f: I \to \mathbb{R}^n$ diff'bar, $L(x) := \| f(x) \|$ Abstand zum Nullpkt.

$L: I \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

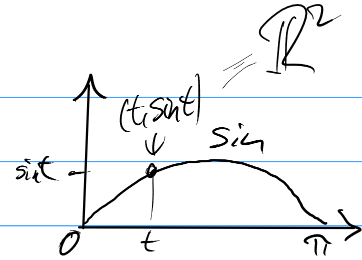
$$\forall x \in I, f(x) \neq 0: \quad \langle f(x), f'(x) \rangle = L(x) \underbrace{L'(x)}_{=0}$$

$$L(x) = \| f(x) \| = \sqrt{f_1^2(x) + \ldots + f_n^2(x)}$$

$$L'(x) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\ldots}}}_{\frac{1}{L(x)}} \cdot \left(2 f_1(x) \cdot f_1'(x) + \ldots \right)$$



Aufgabe 10



$$\sin : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$f : I \to \mathbb{R}^n$ Kurve, stetig diff'bar

$\rightsquigarrow \int_I \|f'(t)\| \, dt$ Bogenlängenformel

Binomialreihe

hier: $$\int_0^\pi \|f'(t)\| \, dt = \int_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 t} \, dt$$

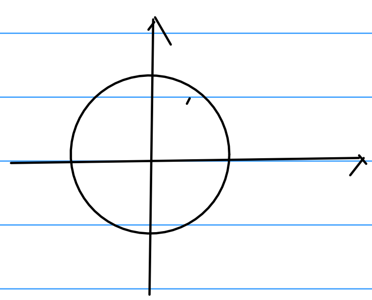
$$= \int_0^\pi \left(1 + \tfrac{1}{2}\cos^2 t - \tfrac{1}{2\cdot 4}\cos^4 t + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cos^6 t - \ldots\right) dt$$

$$\int_0^\pi \cos^{2m} t \, dt = ?$$

Trick: $\gamma_m := \int_0^{\pi/2} \cos^{2m} t \, dt$

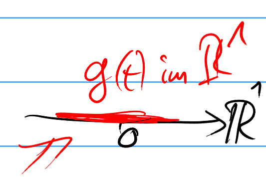
$\rightsquigarrow \gamma_m = \frac{m-1}{m} \cdot \gamma_{m-2}$,

d.h. $\gamma_0 = \frac{\pi}{2}, \ \gamma_2 = \frac{\pi}{2^2}, \ \gamma_4 = \frac{3\pi}{2^4}, \ldots$



$$f(t) := \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$g : [-1,1] \to \underbrace{\mathbb{R}}_{\mathbb{R}^1}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

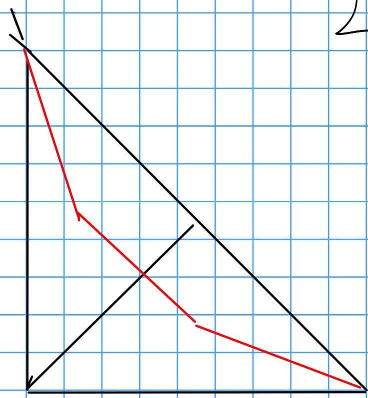


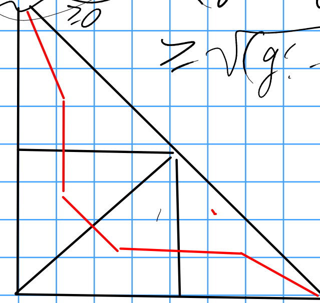
$G: [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \quad G(t) := \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}$

$\sum \|G(t_{i+1}) - G(t_i)\| \geq$

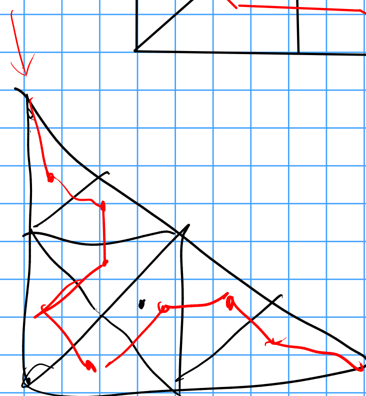
$\sqrt{\underbrace{(t_{i+1}-t_i)^2}_{\geq 0} + (g(t_{i+1}) - g(t_i))^2}$

$\geq \sqrt{(g(\ldots))} \geq \sum |g(t_{i+1}) - g(t_i)| \geq \ldots \geq \sum \frac{1}{i} \to \infty$





$[0,1] \supseteq I_{k_n} \mapsto \Delta_{k_n}$



$\{(x,y)\}^2 = \bigcap \Delta_{k_n}$

$f(t) = (x,y)$

$\{t\} = \bigcap I_{k_n}$