Zu Taylorreihen: Sei $a \in \mathbb{R}$ Entwicklungspunkt.

$$\rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n$$

Geg. zwei Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n, \quad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

mit den Kgz.radien $R_f > 0$ und $R_g > 0$.

Dann: $\forall x, \ |x-a| < \underline{\underline{\min(R_f, R_g)}}$:

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n \pm c_n)(x-a)^n$$

und

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + \dots + c_n b_0)}_{= \sum_{k=0}^{n} c_k b_{n-k}} (x-a)^n \quad \|$$

Bsp.: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1,$

g mit Kgz.radius $r > 0$,

so ist

$$\frac{1}{1-x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(c_0 + c_1 + \dots + c_n)}_{\sum_{i=0}^{n} c_i} x^n$$

$$\rightsquigarrow |x| < \min(1, r)$$

Bsp.: $\sin^2 x = ?$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \underbrace{\frac{x^5}{5!} - \dots}_{\leq C \cdot x^5}$$

$\sin(-x) = -\sin x$

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)$$

$$= x^2 + \underbrace{\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)}_{-\frac{1}{3}} \cdot x^4 + \underbrace{\left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{3!^2} + \frac{1}{5!}\right)}_{=\frac{2}{45}} x^6 + \dots$$

$$\sin^3 x = \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 - \dots\right) \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)$$

$$= x^3 + x^5 \cdot \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + x^7 \cdot \left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{45}\right) + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} \cdot \cos x = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) \cdot \frac{1}{1-x}$$

$$= 1 + x + \underline{\underline{\left(1 - \frac{1}{2!}\right)}} x^2 + \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\right) x^4 + \dots$$

$|x| < 1$

GW-bestimmung:

$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \dots$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^4} - 1}{(1 - \cos x)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + x^4 + \dots - 1}{\left(1 - 1 + \frac{1}{2}x^2 - \dots\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4 + \dots}{\left(\frac{1}{2}x^2 - \dots\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 + \dots}{\frac{1}{4}x^4 + \dots}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \dots}{\frac{1}{4} + \dots} = 4$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \dots$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\log^2(1+x)\cdot \sin^2 x}{1-e^{-x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2+\dots)\cdot(x^2+\dots)}{x^2+\dots}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+\dots)\cdot(x^2+\dots)}{1+\dots} = 0$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin x}{(1-\cos x)^2} \overset{\text{s.o.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x^3\cdot(x-\dots)}{x^4/4+\dots} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 - \dots}{x^4/4+\dots} = 4$$

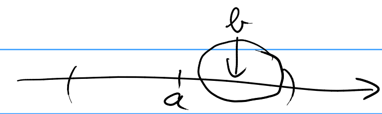
- $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos ax} - \sqrt{\cos bx}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\cos ax}+\sqrt{\cos bx}}}_{\xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{2}} \cdot \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{(ax)^2}{2} + \dots - 1 + \frac{(bx)^2}{2} + \dots}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{4}$$

Transformationssatz (vgl. Heu):

Sei $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$,



Kgz.radius $r > 0$, sei b bel. Punkt im Kgz.IV.

Dann: $\forall x, |x-b| < r - |b-a|$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-b)^n, \quad \leftarrow$$

$$\text{mit } d_k = \sum_{m=k}^{\infty} \binom{m}{k} c_m (b-a)^{m-k}$$

Identitätssatz:

Vor.: Geg. sei $f(x) = \sum b_n (x-a)^n$, $g(x) = \sum c_n (x-a)^n$
beide mit Kgz.IV I.
Ex. Folge (x_k) in $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ mit $x_k \to a$
und $\forall k \in \mathbb{N}: f(x_k) = g(x_k)$.

Beh.: Dann: $\forall x \in I: f(x) = g(x)$
und $\forall n \in \mathbb{N}_0: \underline{b_n = c_n}$. $\rightsquigarrow$ "Koeffizientenvergleich"

Bew.: Vollst. ind. nach n: $n=0$:

$$\underline{b_0} = f(a) = f(\lim x_k) \underset{\text{da } f \text{ stetig}}{=} \lim f(x_k) = \lim g(x_k) \overset{g \text{ stetig}}{=} g(\lim x_k)$$
$$= g(a) = \underline{c_0}.$$

$n \rightsquigarrow n+1$: Sei schon $c_0 = b_0, c_1 = b_1, \ldots, c_n = b_n$.

Dann: $f_n(x) = b_{n+1} + b_{n+2}(x-a) + b_{n+3}(x-a)^3 + \ldots$
$g_n(x) = c_{n+1} + c_{n+2}(x-a) + c_{n+3}(x-a)^3 + \ldots$

und $f_1(x) = \dfrac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k}{(x-a)^{n+1}}$, g_1 analog

Ind.vor.: $\forall k: f_1(x_k) = g_1(x_k)$

$\rightsquigarrow b_{n+1} = c_{n+1}$ mit Stetigkeitsargument wie im Ind.anf. $\square$

Die Vereinigung von ∞ vielen offenen Mengen ist offen.

<u>Beh.:</u> Der Schnitt von ∞ vielen " " muss nicht offen sein.

Bsp.: $I_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$, $n \in \mathbb{N}$

$\rightsquigarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{0\}$ abg.

Der Schnitt von ∞ vielen abg. Mengen ist abg.

<u>Beh.:</u> Vereinigung von ∞ vielen abg. Mengen muss nicht abg. sein

Bsp.: $I_n := [-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$

$\rightsquigarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n =]-1, 1[$ offen

X metr. Raum

$A \subseteq X$ $\qquad\qquad I = \mathbb{N}$

$(U_i)_{i \in I}$ Familie von Teilmengen von X,

d.h. $I \to \{U \subseteq X\}$
$i \mapsto U_i$ ist eine Funktion

$i \neq j \rightsquigarrow U_i = U_j$

$\{U_1, U_2, U_3, \ldots\} = \{U_1, U_2, U_4\} \ldots$

$\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, -1\}$

$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \;:\Leftrightarrow\; (U_i)_{i \in I}$ ist Überdeckung von A

Bsp.:

$x \in X \rightsquigarrow$
$B_\varepsilon(x) := \{y \in X;\, d(x,y) < \varepsilon\}$ offen

$A \subseteq \bigcup_{x \in A} B_\varepsilon(x)$ offene Überdeckung

$A \subseteq X$ heißt kompakt $:\Leftrightarrow$ Bei jeder offenen Überdeckung von A reichen schon endlich viele Überdeckungsmengen zur Überdeckung aus.

Satz: (Heine-Borel) $X = \mathbb{R}^n$: $(A \subseteq X$ kp. $\Leftrightarrow A$ abg. und A beschr.$)$

$f([a,b]) = [c,d]$