Lösungshinweise zu Blatt 2, Analysis 2:

Aufgabe 7

Vor.: X metr. Raum, $K_1, K_2 \subseteq X$ kompakte Teilmengen.

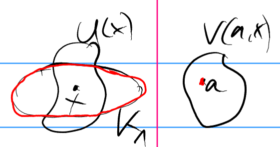
Beh.: $\exists\, U_1, U_2 \subseteq X$ offen: $K_1 \subseteq U_1$, $K_2 \subseteq U_2$ mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Bew.: (Dass X hausdorffsch ist, darf verwendet werden)

Tip: Fall-unterscheidung!

2P 1. Fall: $K_2 = \{a\}$.

Für alle $x \in K_1$ gibt es offene Umg. $U(x)$ von x und $V(a,x)$ von a mit $U(x) \cap V(a,x) = \emptyset$, da X hausdorffsch.



Dann ist $K_1 \subseteq \bigcup_{x \in K_1} U(x)$,

und da K_1 kompakt ist, ex. $x_1, \dots, x_m \in K_1$ mit $K_1 \subseteq U(x_1) \cup U(x_2) \cup \dots \cup U(x_m)$ $(=: U_1)$.

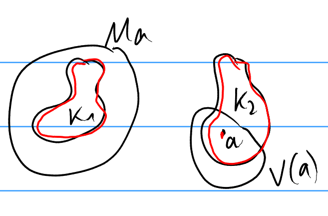
Setze $U_2 := V := \bigcap_{i=1}^{m} V(a, x_i)$, dies ist eine offene Umgebung von a, die $\bigcup_{i=1}^{m} U(x_i)$ nicht schneidet. ✓

2P 2. Fall: K_2 bel. Für jedes $a \in K_2$ bestimme laut Fall 1 eine offene Umgebung $V(a)$ von a und eine offene Menge $M_a \supseteq K_1$, die $V(a)$ nicht schneidet. Für gewisse $a_1, \dots, a_n \in K_2$ ist $U_2 := \bigcup_{i=1}^{n} V(a_i) \supseteq K_2$ und U_2 offen,

setze $U_1 := \bigcap_{i=1}^{n} M_{a_i} \supseteq K_1$ und es ist U_1 offen,

sowie $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

$\square$



Aufgabe 5

(a) Vor.: X, Y metr. Räume, $f: X \to Y$ stetig.

Beh.: $A \subseteq Y$ abg. $\Rightarrow f^{-1}(A)$ abg. in X

Bew.: Sei $A \subseteq Y$ abg. Dann ist $Y \setminus A$ offen und $f^{-1}(Y \setminus A)$ offen, da f stetig. (Satz 0.7)

2P

Weiter ist $f^{-1}(Y \setminus A) \overset{!}{=} Y \setminus f^{-1}(A)$, also ist $f^{-1}(A)$ abg.

Zu $\overset{!}{=}$: $\ulcorner$ • $x \in f^{-1}(Y \setminus A) \Rightarrow \exists\, b \in Y \setminus A : f(x) = b$

Beh.: $x \notin f^{-1}(A)$, sonst: $\exists a \in A : f(x) = a = b \in Y \setminus A$, ↯.

• $x \in Y \setminus f^{-1}(A) \Rightarrow \nexists\, a \in A : f(x) = a$

$\Rightarrow \forall a \in A : f(x) \neq a$, d.h. $f(x) \notin A \to f(x) \in Y \setminus A$,

also ist $x \in f^{-1}(Y \setminus A)$. $\lrcorner$

Fall $f^{-1}(Y \setminus A) = \emptyset = Y \setminus f^{-1}(A)$: Beh. klar

$\square$

(b) Vor.: X metr. R., $f: X \to \mathbb{R}$ stetig, $a, b \in \mathbb{R}$.

1P

Beh.: Die folgenden Mengen sind abgeschlossen in X:

Bew.:

(i) $\{x \in X \mid f(x) = a\} = f^{-1}(\{a\})$ ist abg. in X, da $\{a\}$ abg. in $\mathbb{R}$

(ii) $\{x \in X \mid f(x) \geq a\} = f^{-1}([a, \infty[)$ ist abg. in X, da $[a, \infty[$ abg. in $\mathbb{R}$

(iii) $\{x \in X \mid f(x) \leq a\} = f^{-1}(]-\infty, a])$ ist abg. in X, da $]-\infty, a]$ abg. in $\mathbb{R}$

(iv) $\{x \in X \mid a \leq f(x) \leq b\} = f^{-1}([a, b])$ ist abg. in X, da $[a, b]$ abg. in $\mathbb{R}$

$\square$

(c) Bsp., dass das Urbild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abb. nicht notw. kompakt sein muss:

1P

Betr. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1$, dann ist $f(\mathbb{R}) = \{1\}$ kp., f stetig und

$f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R}$ nicht kompakt, da unbeschränkt.

(Unter Verwendung von Heine-Borel)

$\square$

[Auch: Bild offener Mengen unter stetigem f muss nicht offen sein usw. ...]

Aufgabe 6

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $D \subseteq X$. Dann ist auch D ein metrischer Raum mit der eingeschränkten Metrik $d_{D \times D}$.

$[B_\varepsilon(x) = \{a \in X \mid d(a,x) < \varepsilon\}]$

1,5P (a) Beh.: Für $U \subseteq D$ gilt: $U \subseteq D$ offen $^{\text{in } D}$ $\Leftrightarrow \exists B \subseteq X$ offen$^{\text{in } X}$: $U = D \cap B$

Bew.: „$\Rightarrow$": $U \subseteq D$ offen $\overset{\text{in } D}{\Rightarrow} \forall x \in U \subseteq X\ \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) \cap D \subseteq U \subseteq X$,

setze $B := \bigcup_{x \in U} B_\varepsilon(x) \Rightarrow B$ offen in X und $B \cap D = U$ ✓

„$\Leftarrow$": $\forall x \in U = D \cap B \subseteq B\ \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) \subseteq B$, da B offen in X,

also: $B_\varepsilon(x) \cap D \subseteq B \cap D = U$,

und $B_\varepsilon(x) \cap D$ ist die ε-Kugel in D mit Mittelpkt. $x \in U$ ✓ $\square$

1,5P (b) Beh.: Für $A \subseteq D$ gilt: $A \subseteq D$ abg. in $D \Leftrightarrow \exists C \subseteq X$ abg. in X: $A = D \cap C$

Bew.: $A \subseteq D$ abg. in $D \Leftrightarrow D \setminus A \subseteq D$ offen in $D \overset{a)}{\Leftrightarrow} D \setminus A = D \cap B$ für $B \subseteq X$ offen in $X \Leftrightarrow A = D \setminus (D \setminus A) = D \setminus (D \cap B) = D \cap (X \setminus B) = D \cap C$ für $C = X \setminus B$ abg. in X. $\square$

½P c) Finden Sie ein Bsp. $\boxed{\text{in Anfg. 5 c)}}$ für $D \subseteq X = \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ stetig, so dass die angegebenen Mengen [(i)–(iv)] nicht abg. in $X = \mathbb{R}$ sind.

Bsp.: $f: \underbrace{]0,1[}_{D:=} \to \mathbb{R}$, $f(x) := a$

Dann: $f^{-1}(M_j) =]0,1[$ nicht abg. in $X = \mathbb{R}$

½P d) Bsp. für $D = X = \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ unstetig, so daß Menge (i)–(iv) nicht abg. sind.

Bsp.: $g, f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$ / $g(x) := \begin{cases} -1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$

$\rightsquigarrow f^{-1}(\{0\}) =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$ offen

$f^{-1}(]-\infty, 0]) =$ " offen, $g^{-1}([0,\infty[) =$ " offen,

$g^{-1}([0,1]) =$ " offen. ✓

Aufgabe 8

Vor.: X metr. Raum, $M \subseteq X$.

Def.: $\overline{M} := \{ a \in X \mid \exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}}, \forall k: x_k \in M : x_k \xrightarrow{n \to \infty} a \}$ die abgeschlossene Hülle / der Abschluss von M,

$\mathring{M} := X \setminus (\overline{X \setminus M})$, das Innere von M,

$\partial M := \overline{M} \setminus \mathring{M}$, Rand von M. Auch möglich [Forster]: $\partial M :=$

$\frac{1}{2}$P (a) Beh.: $\overline{M}$ ist abgeschl.

Bew.: $\forall (x_k) \subseteq \overline{M}: x_k \to a \in X \Rightarrow a \in \overline{M}$ wegen Def. von $\overline{M}$.

Mit Satz 0.5 folgt, daß $\overline{M}$ abg. ist. $\square$

(b) Beh.: $\overline{M} = \cap \{ A \subseteq X \mid M \subseteq A$ und $A \subseteq X$ abg.$\} = \bigcap_{\substack{A \subseteq X \text{abg.}, \\ M \subseteq A}} A$.

1P Bew.: „$\supseteq$": klar, da $A = \overline{M}$ abg. ist nach a) und bei der Schnittmengenbildung auf der r. S. vorkommt.

„$\subseteq$": $a \in \overline{M} \Rightarrow \exists (x_k) \subseteq M : x_n \to a$.

Sei $A \subseteq X$ abg., $M \subseteq A$. (D.h. A beliebig mit dieser Eigenschaft. Zu zeigen: $a \in A$. Dann ist a auch im Schnitt all dieser A.)

Die (x_k) liegen alle in M, also in A.

Weil A abg., folgt aus Satz 0.5: $a \in A$. ✓ $\square$

$\frac{1}{2}$P (c) Beh.: M abg. $\Leftrightarrow \overline{M} = M$.

Bew.: „$\Leftarrow$": klar, da $\overline{M}$ abg. wegen a),

„$\Rightarrow$": wegen b) ist $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{eh klar}}}{M \subseteq} \overline{M} = \bigcap_{\substack{A \subseteq X \text{abg.}, \\ M \subseteq A}} A \subseteq M$, da M abg., also $\overline{M} = M$.

$\leftarrow$ ($A = M$ ist dabei) $\square$

1P (d) Beh.: $\mathring{M}$ ist offen.

Bew.: $\mathring{M} := X \setminus (\overline{X \setminus M})$ ist offen in X, da $\overline{X \setminus M}$ abg. laut b). $\square$

1P (e) Beh.: ∂M ist abgeschlossen.

Bew.: $\partial M := \overline{M} \setminus \mathring{M} = \overline{M} \setminus (X \setminus (\overline{X \setminus M})) = \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$ abg. $\square$

$[x \notin X \setminus (\overline{X \setminus M}) \Leftrightarrow x \in \overline{X \setminus M}]$

Bem.: was ist $\overline{\mathbb{Q}}$, $\mathring{\mathbb{Q}}$ und $\partial \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$? usw.