§7: Das große Sieb

7.1. Die große Sieb-Ungleichung

Wir starten mit folgendem Hilfslemma:

Lemma 7.1: Sei $F: [0,1] \to \mathbb{C}$ diff'bar mit stetiger Ableitung, auf $\mathbb{R}$ periodisch fortgesetzt, sei $z \in \mathbb{N}$. Dann:

$$\sum_{q \leq z} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a,q)=1}} \left|F\left(\tfrac{a}{q}\right)\right| \leq z^2 \int_0^1 |F(\alpha)| d\alpha + \int_0^1 |F'(\alpha)| d\alpha.$$

Bew.: Sei $q \leq z$, $a \in [1,q] \cap \mathbb{N}$, $(a,q)=1$, $\alpha \in [0,1]$. Dann: $-F\left(\frac{a}{q}\right) = -F(\alpha) + \int_{a/q}^{\alpha} F'(t) dt$,

also $\left|F\left(\frac{a}{q}\right)\right| \leq |F(\alpha)| + \int_{a/q}^{\alpha} |F'(t)| dt$.

Sei $\delta > 0$ fest so, daß die Intervalle $I\left(\frac{a}{q}\right) := \left(\frac{a}{q} - \delta, \frac{a}{q} + \delta\right)$ in $[0,1]$ enthalten sind. Integrieren der Ungl. über ein $I\left(\frac{a}{q}\right)$ zeigt:

$$2\delta \left|F\left(\tfrac{a}{q}\right)\right| \leq \int_{I(\frac{a}{q})} |F(\alpha)| d\alpha + \underbrace{\int_{I(\frac{a}{q})} \int_{\frac{a}{q}}^{\alpha} |F'(t)| dt\, d\alpha}_{\leq \int_{I(\frac{a}{q})} \int_{I(\frac{a}{q})} |F'(t)| dt\, d\alpha} \quad \rightsquigarrow t \in \left[\tfrac{a}{q}, \alpha\right] \subseteq I\left(\tfrac{a}{q}\right)$$

$$\leq 2\delta \int_{I(\frac{a}{q})} |F'(t)| dt.$$

Sei $\delta := \frac{1}{2z^2}$, dann überlappen sich die IVe nicht.

⌜Sonst $x \in I\left(\frac{a}{q}\right) \cap I\left(\frac{a'}{q'}\right) \Rightarrow \left|x - \frac{a}{q}\right| < \delta, \left|x - \frac{a'}{q'}\right| < \delta \Rightarrow \underbrace{\left|\frac{a}{q} - \frac{a'}{q'}\right|}_{= \frac{|aq' - a'q|}{qq'} \geq \frac{1}{qq'} \geq \frac{1}{z^2}} < 2\delta = \frac{1}{z^2}$, ↯ ⌟

Summieren der Ungl. über alle (a,q) zeigt:

$$\frac{1}{z^2} \sum_{q \leq z} \sum_{\substack{1 \leq a < q \\ (a,q)=1}} \left|F\left(\tfrac{a}{q}\right)\right| \leq \sum_{(a,q)} \int_{I(\frac{a}{q})} |F(\alpha)| d\alpha + \frac{1}{z^2} \sum_{(a,q)} \int_{I(\frac{a}{q})} |F'(\alpha)| d\alpha$$

$$\leq \int_0^1 |F(\alpha)| d\alpha + \frac{1}{z^2} \int_0^1 |F'(\alpha)| d\alpha. \qquad \square$$

Als Korollar erhalten wir:

Lemma 7.2: Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge komplexer Zahlen, $N, Q \in \mathbb{N}$. Dann:

$$\boxed{\sum_{q\leq Q} \sum_{\substack{1\leq a\leq q \\ (a,q)=1}} \Big|\sum_{n\leq N} a_n\, e\Big(n\cdot\frac{a}{q}\Big)\Big|^2 \leq (4\pi N + Q^2)\cdot \sum_{n\leq N} |a_n|^2.}$$

Bem.: Diese Unglg. heißt auch große Sieb-Ungleichung. Der Zusammenhang mit Siebproblemen wird später klar.

Notation: $e(\alpha) := e^{2\pi i\alpha}$.

Bew.: Wir wählen jetzt $F(\alpha) := S(\alpha)^2$, mit $z := Q$,

$S(\alpha) := \sum_{n\leq N} a_n\, e(\alpha n)$, um damit Lemma 7.1 anzuwenden.

Es folgt: $l.S. =$

$$\sum_{q\leq Q} \sum_{\substack{1\leq a\leq q \\ (a,q)=1}} |S(\tfrac{a}{q})|^2 \leq Q^2 \int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha + 2\int_0^1 |S(\alpha)S'(\alpha)|\, d\alpha.$$

Mit der Parseval-Glg. $\int_0^1 |\underbrace{\sum_{n\leq N} a_n e(\alpha n)}_{S(\alpha)}|^2 d\alpha = \sum_{n\leq X} |a_n|^2$ folgt

$$l.S. \leq Q^2 \sum_{n\leq Q} |a_n|^2 + 2\underbrace{\int_0^1 |S(\alpha)S'(\alpha)|\, d\alpha}$$

$$\underset{CS}{\leq} \Big(\int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha\Big)^{\frac12} \cdot \Big(\int_0^1 |S'(\alpha)|^2 d\alpha\Big)^{\frac12}$$

$$\underset{\text{Parseval}}{\leq} \Big(\sum_{n\leq N} |a_n|^2\Big)^{\frac12} \Big(\sum_{n\leq N} 4\pi^2 n^2 |a_n|^2\Big)^{\frac12} \leq 2\pi N \sum_{n\leq N} |a_n|^2.$$

Es folgt die Beh. $\square$

Bem.: Die Ungleichung kann auch mit $N + Q^2$ anstelle $4\pi N + Q^2$ gezeigt werden.

Bevor wir damit eine Siebmethode herleiten, benötigen wir noch ein paar Tatsachen über

Ramanujan-Summen $\quad c_q(n) := \sum_{\substack{1\leq a\leq q \\ (a,q)=1}} e\Big(a\frac{n}{q}\Big).$

Lemma 7.3: Seien $q, q' \in \mathbb{N}$. Dann gilt

1) $(q,q')=1 \Rightarrow c_{qq'}(n) = c_q(n)\, c_{q'}(n)$
2) $c_q(n) = \sum_{d|(q,n)} \mu\left(\frac{q}{d}\right)\cdot d$
3) $(q,n)=1 \Rightarrow c_q(n) = \mu(q)$, d.h. $\sum_{\substack{1\le a\le q\\(a,q)=1}} e\left(a\frac{n}{q}\right) = \mu(q)$.

Bew.: 1) nachrechnen, 3) ist Kor. aus 2).

zu 2): Betr. $\tilde{c}_q(n) := \sum_{1\le a\le q} e\left(a\frac{n}{q}\right) = e\left(\frac{n}{q}\right)\sum_{0\le a\le q-1} e\left(\frac{n}{q}a\right) = \begin{cases} e\left(\frac{n}{q}\right)\cdot \frac{e(n)-1}{e\left(\frac{n}{q}\right)-1} = 0, & q\nmid n,\\ e\left(\frac{n}{q}\right)\cdot q = q, & q\mid n.\end{cases}$

Außerdem $\tilde{c}_q(n) = \sum_{d|q}\sum_{\substack{1\le a\le q\\(a,q)=d}} e\left(a\frac{n}{q}\right) = \sum_{d|q}\sum_{\substack{a'\le \frac{q}{d}\\(a',\frac{q}{d})=1}} e\left(a_1\frac{dn}{q}\right) = \sum_{d|q} c_{\frac{q}{d}}(n) \rightsquigarrow \tilde{c}_{(n)} = c_{(n)} * \mathbb{1}$

$\overset{\text{Möbius-}}{\underset{\text{inversion}}{\Rightarrow}}$ $c_q(n) = \sum_{d|q}\mu(d)\,\tilde{c}_{\frac{q}{d}}(n) = \sum_{d|q}\mu\left(\frac{d}{q}\right)\tilde{c}_d(n) = \sum_{d|(q,n)}\mu\left(\frac{d}{q}\right)\cdot d.$ $\square$

7.2 Das große Sieb

Wir leiten nun eine Siebmethode aus der großen-Sieb-Unglg. her.

Sei $\mathcal{A}\subseteq\{n\le x\}$, $\mathcal{P}\subseteq\mathbb{P}$.

Für jedes $p\in\mathcal{P}$ betr. wir eine Menge von $\omega(p)$ vielen Streichungsrestklassen $\{w_{1,p},\dots,w_{\omega(p),p}\}$ modulo p.

Sei $z>0$ reell und $P(z) := \prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\p<z}} p$.

Betr. die gesiebte Menge

$$\mathcal{S}(\mathcal{A},\mathcal{P},z) := \{n\in\mathcal{A};\ n\not\equiv w_{i,p}\,(p) \text{ für alle } 1\le i\le\omega(p),\ p\mid P(z)\}.$$

Dann gilt für die Siebfkt. $S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) := \#\mathcal{S}(\mathcal{A},\mathcal{P},z)$:

Satz (Das große Sieb):
(auch: Montgomerys Sieb)

$$\boxed{S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) \le \frac{z^2+4\pi x}{L(z)}, \quad \text{wo } L(z) := \sum_{\substack{d\le z\\d|P(z)}}\mu^2(d)\prod_{p|d}\frac{\omega(p)}{p-\omega(p)}.}$$

Bem.: In den Anwendungen werden untere Schranken für $L(z)$ benötigt. Die einfache Schranke $L(z) \ge \sum_{\substack{p<z\\p\in\mathcal{P}}} \underbrace{\frac{\omega(p)}{p-\omega(p)}}_{\text{ist groß, wenn } \omega(p) \text{ groß ist}}$ reicht oft aus. $\rightsquigarrow$ „großes" Sieb

Bew.: Sei $d \mid P(z)$, etwa $d = p_1 \cdots p_t$

$\overset{CRS}{\rightsquigarrow}$ $\forall\, \underline{i} = (i_1, \ldots, i_t),\ 1 \le i_1 \le \omega(p_1), \ldots, 1 \le i_t \le \omega(p_t),\ \exists\, w_{\underline{i},d} \in \mathbb{Z}$:

$$w_{\underline{i},d} \equiv w_{i_j, p_j}\ (p_j) \text{ für alle } 1 \le j \le t.$$

Sei $\omega(d)$ die Anzahl all solcher $w_{\underline{i},d}$, also ist $\omega(d) = \prod_{i=1}^{t} \omega(p_i)$.

Sei $n \in \mathcal{S}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)$, also $(n - w_{\underline{i},d}, d) = 1$.

$\boxed{L.7.3,3)}$

$$\Rightarrow \mu(d) = c_d(n - w_{\underline{i},d}) = \sum_{\substack{1 \le a < d \\ (a,d)=1}} e\left(\frac{a}{d}(n - w_{\underline{i},d})\right).$$

Aufsummieren über alle $\underline{i}$ zu d, alle $n \in \mathcal{S}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)$:

$$\mu(d)\omega(d) S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = \sum_{\substack{1 \le a < d \\ (a,d)=1}} \sum_{w_{\underline{i},d}} e\left(\frac{-w_{\underline{i},d}\, a}{d}\right) \sum_{n \in \mathcal{S}(\mathcal{A},\mathcal{P},z)} e\left(n\frac{a}{d}\right).$$

CS-Unglg.

$$\rightsquigarrow |\mu(d)\omega(d) S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)|^2 \le \underbrace{\left(\sum_a \left|\sum_{w_{\underline{i},d}} e\left(\frac{-w_{\underline{i},d}\, a}{d}\right)\right|^2\right)}_{= \sum_{w_{\underline{i},d},\, w_{\underline{i}',d}} c_d(w_{\underline{i}',d} - w_{\underline{i},d})} \cdot \left(\sum_a \left|\sum_{n \in \mathcal{S}(\mathcal{A},\mathcal{P},z)} e\left(n\frac{a}{d}\right)\right|^2\right).$$

Mit L.7.3,2) folgt

$$\sum_{w_{\underline{i},d},\, w_{\underline{i}',d}} \sum_{t \mid (d,\, w_{\underline{i},d} - w_{\underline{i}',d})} \mu\left(\frac{d}{t}\right) t = \sum_{t \mid d} \sum_{\substack{w_{\underline{i},d},\, w_{\underline{i}',d} \\ w_{\underline{i},d} \equiv w_{\underline{i}',d}\ (t)}} \mu\left(\frac{d}{t}\right) t = \sum_{t \mid d} \mu\left(\frac{d}{t}\right) t\, \omega(d)\, \omega\left(\frac{d}{t}\right)$$

$$= d\,\omega(d) \sum_{s \mid d} \frac{\mu(s)\omega(s)}{s} = d\,\omega(d) \prod_{p \mid d}\left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) = \omega(d) \prod_{p \mid d} (p - \omega(p)).$$

$$\rightsquigarrow |\mu(d)\omega(d) S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)|^2 \le \omega(d) \prod_{p \mid d} (p - \omega(p)) \cdot \left(\sum_a \left|\sum_{n \in \mathcal{S}(\mathcal{A},\mathcal{P},z)} e\left(\frac{na}{d}\right)\right|^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \mu^2(d)\, S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)^2 \prod_{p \mid d} \frac{\omega(p)}{p - \omega(p)} \le \sum_a \left|\sum_{n \in \mathcal{S}(\mathcal{A},\mathcal{P},z)} e\left(\frac{na}{d}\right)\right|^2.$$

Summieren über $d \le z$ $(d \mid P(z))$, mit $a_n := \begin{cases} 1, & n \in \mathcal{S}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ wenden wir die große-Sieb-Unglg. an

$$\rightsquigarrow \sum_{d \le z} \mu(d)^2 S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)^2 \prod_{p \mid d} \frac{\omega(p)}{p - \omega(p)} \le (z^2 + 4\pi x)\, S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z).$$

$\rightsquigarrow$ Beh. $\square$

Bem.: Die Konstante 4π kann auch weggelassen werden.