2. Anwendung: Sei $\pi_m(x) := \#\{p \in \mathbb{P};\ p \le x,\ p+m \in \mathbb{P}\}$ für $2 \mid m$,
insb. ist $\pi_2(x)$ die Anzahl der PZZwillinge $\le x$.

Dann ist $\pi_m(x) \ll \frac{x}{(\log x)^2} \prod_{p \mid m} \left(1+\frac{1}{p}\right)$ mit absoluter impliziter Konstante.

Beweis: Der Beweis ist ähnlich dem der für das Goldbach-Problem.
Wir betr. hier $\mathcal{P} = \mathbb{P}$, $\mathcal{A} = (a_k)_{1 \le k \le x}$ mit $a_k := k(k+m)$, $\#\mathcal{A} = \lfloor x \rfloor$.
Für $2 < z \le \sqrt{x}$ betr. $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)$ wie bisher, für $k > \sqrt{x}$ mit $a_k \equiv 0(p)$ für ein $p < z$ ist k oder $k+m$ zusammengesetzt, was $\pi_m(x) \le \sqrt{x} + S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)$ zeigt.
Wir benutzen dieselbe Fkt. g wie in der 1. Anwendung, genau gleich liefert das Selberg-Sieb die behauptete Abschätzung. $\square$

Für $m = 2$ ist damit $\pi_2(x) \ll \frac{x}{(\log x)^2}$ bewiesen, was schärfer ist als die mit dem Brunschen Sieb erhaltene Schranke.

---

3. Anwendung: Pzen in kurzen Intervallen

Nehmen $\mathcal{A} = \{m;\ x < m \le x+y\}$, $\mathcal{P} = \mathbb{P}$,
so daß $\#\mathcal{A}_d = \frac{y}{d} + O(1)$, $g(d) = \frac{1}{d}$ für $d \in \mathbb{N}$.

Dann:
$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) \le \frac{y}{\log z} + O\Big(\sum_{d < z^2} 3^{\nu(d)} \mu(d)^2\Big) \le \frac{y}{\log z} + O\left(z^2 \log^3 z\right)$$

mit $\sum_{n \le x} d(n)$-Formel

$\ulcorner$ Denn: $G(z) = \sum_{\substack{m < z \\ p \mid m \Rightarrow p \in \mathcal{P}}} g(m) = \sum_{m < z} \frac{1}{m} \ge \log z$, $\sum_{d < z^2} 3^{\nu(d)} \le \sum_{d < z^2} 2^{\nu(d) \cdot \frac{\log 3}{\log 2}} \le \sum_{d < z^2} d(z)^2 \le z^2 \log^3 z$ $\lrcorner$

Andererseits ist $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = \#\{m;\ x < m \le x+y,\ p \mid m \Rightarrow p \ge z\}$
$\ge \pi(x+y) - \pi(x) - z$ (falls $z > x$)

Mit der Wahl $z = \frac{\sqrt{y}}{(\log y)^3}$ folgt $\pi(x+y) - \pi(x) \le \frac{2y}{\log y} + O\left(\frac{y \log\log y}{(\log y)^2}\right)$.

$\ulcorner \frac{y}{\log\left(\frac{\sqrt{y}}{(\log y)^3}\right)} - \frac{2y}{\log y} = \frac{2y}{\log y - 6 \log\log y} - \frac{2y}{\log y} \ll \frac{y \log\log y}{(\log y)^2} \lrcorner$

Bemerkung: Mit dem großen Sieb zeigten Montgomery & Vaughan die schärfere Abschätzung $\pi(x+y) - \pi(x) \le \frac{2y}{\log y}$.

Bewiesen: $\pi(x+y)-\pi(x) \sim \frac{y}{\log x}$ für $y \geq x^{\frac{7}{12}}$, [Heath-Brown]
dies ist aber falsch für $y \simeq (\log x)^A$, $A>1$, [Maier].

Vermutung: $\pi(x+y) \leq \pi(x)+\pi(y)$ für $x,y \geq 2$ bel.
Bewiesen: ist inkompatibel mit Prim-k-Tupel-Vermutung (= Verallg. der PZ Zwillingsverm., Goldbach ...)
Zum obigen Faktor 2: es ist unklar, ob dieser verbesserbar ist!

---

4. Anwendung: PZen in Progressionen

Sei $(l,k)=1$, $\mathcal{A}=\{m \leq x;\ m \equiv l\ (k)\}$, $\pi(x,k,l) := \#\{p \in \mathbb{P};\ p \leq x,\ p \equiv l(k)\}$,
$\mathcal{P}=\{p \in \mathbb{P};\ p \nmid k\}$. Dann ist $\pi(x;k,l) \leq S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)+1+\frac{z}{k}$. (Summand $1+\frac{z}{k}$, falls $z>x$)
weiter ist $\#\mathcal{A}_d = \frac{x}{k}\cdot\frac{\omega(d)}{d}+O(1)$ mit $\omega(d)=\begin{cases}1, & (d,k)=1,\\ 0, & (d,k)>1,\end{cases}$ $\rightsquigarrow g(d)=\frac{\omega(d)}{d}$
so daß folgt:

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) \leq \frac{k}{\varphi(k)}\cdot\frac{x}{k}\cdot\frac{1}{\log z}+\sum_{d \leq z^2} 3^{\nu(d)}\mu(d)^2$$

$$= \frac{x}{\varphi(k)\log z}+O\left(z^2(\log z)^3\right).$$

$\ulcorner G(z)=\sum_{\substack{m<z\\(m,k)=1}}\frac{1}{m}=\sum_{\substack{a(k)\\(a,k)=1}}\sum_{\substack{m<z\\m\equiv a(k)}}\frac{1}{m} \gg \varphi(k)\cdot\frac{\log z}{k}$ ✓

$\gg \sum_{l<\frac{z}{k}}\frac{1}{lk} \gg \frac{\log z}{k} \lrcorner$

Sei $z=\left(\frac{x}{k}\right)^{1/2}\left(\log\frac{x}{k}\right)^{-3}$. Mit $x \geq 4k$ erhalten wir den:

Brun-Titchmarsh-Satz: Für $x \geq 4k$ gilt:
$$\pi(x;k,l) \leq \frac{2x}{\varphi(k)\log\frac{x}{k}}+O\left(\frac{x}{\varphi(k)}\cdot\frac{\log\log\frac{x}{k}}{(\log\frac{x}{k})^2}\right).$$ $\ulcorner$Vgl. Rg. in 3. Anwendung$\lrcorner$

Bem.: Der Siegel-Walfisz-Satz zeigt $\pi(x;k,l) \sim \frac{x}{\varphi(k)\log x}$ für $k \ll (\log x)^A$, damit kann, wenn x groß im Vgl. zu k ist, die Konstante 2 im Satz durch 1 ersetzt werden.

Montgomery & Vaughan zeigten mit dem großen Sieb die Abschätzung:
$$\pi(x;k,l) \leq \frac{2x}{\varphi(k)\log\frac{x}{k}} \text{ für } k<x.$$

Jede Verbesserung der Konstanten 2 zu $2-\delta$ hätte zur Folge, daß keine Siegel-Landau-Nst. existieren! (= nichttriv. Nst. einer L-Fkt. im kritischen Streifen nahe Re s = 1)

Weitere Bem.: Montgomery & Vaughan zeigten ferner:

$$\pi(x+y;k,a) - \pi(x;k,a) \le \frac{2y}{\varphi(k)\log\left(\frac{y}{k}\right)} \quad \text{für } y>k.$$

Dies ist eine Kombination eines Satzes für Pzen in kurzen Iven und in Progressionen.

Auch hier gilt: jede Verbesserung der Konstanten 2 hat zur Folge, daß keine Siegel-Landau-Nst. existieren!

---

5. Anwendung: Quadratsummen

Satz: Sei $q(x) := \#\{n\le x;\ n=a^2+b^2 \text{ für } a,b\in\mathbb{N}\}$. Dann: $\boxed{q(x)\ll \frac{x}{\sqrt{\log x}}}$.

Bew.: Aus der elementaren ZT: $n=a^2+b^2 \iff \left((p|n \,\&\, p\equiv 3(4)) \Rightarrow p^{2\ell}\| n \text{ für ein } \ell\in\mathbb{N}\right)$

$\left(\text{Bem.: } p^\ell \| n :\iff p^\ell|n \,\&\, p^{\ell+1}\nmid n\right)$

$\iff n=c^2k \text{ mit } (p|k\Rightarrow p\not\equiv 3(4))$

Sei $T(x):=\#\{n\le x;\ p|n\Rightarrow (p=2 \vee p\equiv 1(4))\}$.

Somit ist $q(x)\le \sum_{c\le\sqrt{x}} T\left(\frac{x}{c^2}\right)$,

denn aus $c^2k\le x$ folgt $c\le\sqrt{x}$ und $k\le \frac{x}{c^2}$.

Damit ist $T(x)$ nach oben abzuschätzen. Dazu sei $z\ge2$, $\mathcal{A}=\{n\le x\}$,
$\mathcal{P} := \{p\in\mathbb{P};\ p\equiv 3(4)\}$, $P(z):=\prod_{\substack{p<z\\ p\in\mathcal{P}}} p$.

Dann ist

$$T(x)\le S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) = \sum_{\substack{n\le x\\ (n,P(z))=1}} 1.$$

Haben $\#\mathcal{A}_d = \frac{x}{d}+R(d)$ mit $|R(d)|\le 1$, damit setzen wir $g(d):=\frac{1}{d}$.

Das Selberg-Sieb liefert nun

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)\le \frac{x}{F(z)} + \underbrace{\sum_{\substack{d<z^2\\ d|P(z)}} 3^{\nu(d)}}_{\le z^2\log^3 z,\ \text{s. 3. Anw.}},$$

und es ist

$$F(z)=\sum_{\substack{d|P(z)\\ d<z}}\frac{1}{f(d)} \text{ mit } f(d)=\frac{1}{g(d)}\prod_{p|d}(1-g(p)) = d\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p}\right) = d\prod_{p|d}\frac{p-1}{p} = \prod_{p|d}(p-1)=\varphi(d),$$

Dann ist $F(z)=\sum_{\substack{d|P(z)\\ d<z}}\frac{1}{\varphi(d)} = \sum_{\substack{d<z\\ (d,k)=1}}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}$ mit $k:=\prod_{\substack{p<z\\ p\notin\mathcal{P}}} p = 2\prod_{\substack{p<z\\ p\equiv1(4)}} p \rightarrow F(z)=H_k(z)$

Lemma: Sei $H_k(z) := \sum_{\substack{d<z\\ (d,k)=1}}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}$, dann ist $H_k(z)\ge \prod_{\substack{p|k\\ (p<z)}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\log z$.

Beweis des Lemmas:

Haben
$$H_1(z)=\sum_{d<z}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}=\sum_{\ell\mid k}\sum_{\substack{d<z\\(d,k)=\ell}}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}=\sum_{\ell\mid k}\sum_{\substack{h<\frac{z}{\ell}\\(h,k/\ell)=1\\(h,\ell)=1}}\frac{\mu^2(\ell h)}{\varphi(\ell h)}$$
$$=\sum_{\ell\mid k}\frac{\mu^2(\ell)}{\varphi(\ell)}H_k\left(\frac{z}{\ell}\right)\le\left(\sum_{\ell\mid k}\frac{\mu^2(\ell)}{\varphi(\ell)}\right)H_k(z),$$

und
$$\sum_{\ell\mid k}\frac{\mu^2(\ell)}{\varphi(\ell)}=\prod_{p\mid k}\underbrace{\left(1+\frac{1}{p-1}\right)}_{=\frac{p-1+1}{p-1}}=\frac{1}{\prod_{p\mid k}\left(1-\frac{1}{p}\right)}.$$

Somit genügt es, $H_1(z)\ge\log z$ zu zeigen. Dies geht wie folgt.

Haben
$$H_1(z)=\sum_{d<z}\underbrace{\frac{\mu^2(d)}{d}\prod_{p\mid d}\overbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{p}}}^{=\sum_{\ell\ge0}\frac{1}{p^\ell}}}_{\left(=\frac{d}{\varphi(d)}\right)}=\sum_{\substack{n,\\ \mathrm{rad}(n)<z}}\frac{1}{n}\overset{n<z\Rightarrow \mathrm{rad}\, n<z}{\ge}\sum_{n<z}\frac{1}{n}\ge\sum_{n<z}\int_n^{n+1}\frac{dt}{t}$$
$$\ge\int_1^z\frac{dt}{t}=\log z\qquad\square$$

Mit dem Lemma folgt $\frac{x}{F(z)}\ll\frac{x}{\log z}\prod_{\substack{p<z\\p\equiv1(4)}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$.

Zur Absch. des Produkts:

Beh.: $\prod_{\substack{p\le z\\p\equiv1(4)}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\ll\sqrt{\log z}$

Bew.: $2\cdot\sum_{\substack{p\le z\\p\equiv1(4)}}\frac{1}{p}=\sum_{p\le z}\frac{1}{p}+\underbrace{\sum_{p\le z}(-1)^{\frac{p-1}{2}}\cdot\frac{1}{p}}_{\text{Reihe kgt., Leibniz}}$

$$\Rightarrow\sum_{\substack{p\le z\\p\equiv1(4)}}\frac{1}{p}=\frac{1}{2}\sum_{p\le z}\frac{1}{p}+O(1)$$
$$=\frac{1}{2}\log\log z+O(1)=\log\left(\sqrt{\log z}\right)+O(1).$$

Wegen $\log\left(\prod_{\substack{p\le z\\p\equiv1(4)}}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)=\sum_{\substack{p\le z\\p\equiv1(4)}}\frac{1}{p}+O(1)$ folgt: $\prod_{\substack{p\le z\\p\equiv1(4)}}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=e^{O(1)}e^{\log(\sqrt{\log z})}=e^{O(1)}\sqrt{\log z}$. ┘

Es folgt $\frac{x}{F(z)}\ll\frac{x}{\log z}\cdot\sqrt{\log z}=\frac{x}{\sqrt{\log z}}$, also $T(x)\ll\frac{x}{\sqrt{\log z}}+O(z^2\log^3 z)$.

Somit ist
$$q(x)\le\sum_{c\le\sqrt{x}}T\left(\frac{x}{c^2}\right)\ll\frac{x}{\sqrt{\log z}}\cdot\underbrace{\sum_{c\le\sqrt{x}}\frac{1}{c^2}}_{\ll1}+O\left(\sqrt{x}\cdot z^2\log^3 z\right).$$

Setze $z:=x^{1/5}$, dann ist $q(x)\ll\frac{x}{\sqrt{\log x}}+O\big(\underbrace{x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{5}}}_{=x^{9/10}}\log^3 x\big)\ll\frac{x}{\sqrt{\log x}}.\qquad\square$

6. Anwendung: Stammbruchsummen

Jeder Bruch $\frac{z}{n}$ mit $1<z<n$ kann als endl. Summe von verschiedenen Stammbrüchen der Form $\frac{1}{k}$ geschrieben werden („ägyptische Darstellung"): Man spalte den größten Stammbruch ab, so daß der Rest nichtneg. ist, und verfahre ebenso mit dem Rest.

Bsp.: $\frac{4}{17}=\frac{1}{5}+\frac{1}{29}+\frac{1}{1233}+\frac{1}{3039345}$.

Oft existieren ägyptische Darstellungen mit weniger Summanden und kleineren Nennern, etwa $\frac{4}{17}=\frac{1}{6}+\frac{1}{15}+\frac{1}{510}$.

Vermutung:

Für alle $\frac{z}{n}$ mit $z\in\mathbb{N}$ fest ex. ein $n_0(z)>z$, so daß $\forall n\geq n_0(z)$:

$\frac{z}{n}$ hat ägyptische Darstellung mit höchstens 3 Summanden.

Die Vermutung stimmt für $z=2$ wegen $\frac{2}{n}=\frac{1}{k}+\frac{1}{kn}$ mit $k=\frac{n+1}{2}$ für $n>2$, $2\nmid n$,

sowie für $z=3$ wegen $\frac{3}{n}=\frac{1}{k}+\frac{1}{kn}$ mit $k=\frac{n+1}{3}$ für $n>3$, $n\equiv-1\,(3)$

und $\frac{3}{n}=\frac{1}{k}+\frac{2}{kn}$ mit $k=\frac{n+2}{3}$ für $n>3$, $n\equiv+1\,(3)$.

Für $z=4$ stammt die Vermutung von Erdős und ist nach wie vor ungelöst.

Sei $a(z,n)$ die Mindestzahl der Summanden in einer ägyptischen Darst. von $\frac{z}{n}$.

Dann gilt:

Satz (Erdős): Die Menge $\{n\geq 5;\ a(4,n)>2\}$ hat die Dichte 0.

Beweis: Ist $p\equiv 3\,(4)$, gilt $\frac{4}{p}=\frac{1}{k}+\frac{1}{kp}$ mit $k=\frac{p+1}{4}$,

also $\frac{4}{pm}=\frac{1}{km}+\frac{1}{kpm}$ für alle $m\in\mathbb{N}$.

Somit gilt $a(4,n)>2$ nur, wenn $p\mid n\Rightarrow p\equiv 1\,(4)$. Dann ist aber $n=a^2+b^2$,

und mit $\frac{q(x)}{x}\ll\frac{1}{\sqrt{\log x}}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$ folgt die Beh. (5. Anw.) $\square$

Wir zeigen nun als Anwendung des Selberg-Siebs:

Satz (Hofmeister/Stoll): $\boxed{\#\{n\leq x;\ (n,z)=1,\ a(z,n)>2\}\ll\frac{x}{(\log x)^{1/\varphi(z)}}}$

Bew.:

Die $n \le x$ mit einem Primteiler $p \equiv -1\ (z)$ oder $p \equiv -n\ (z)$ erfüllen $a(z,n) \le 2$.

⌈Denn: $pq = n$, $p = -1 + rz$ bzw. $p = -n + rz$

$\rightsquigarrow \frac{z}{n} = \frac{1}{rq} + \frac{1}{rn}$ bzw. $\frac{z}{n} = \frac{1}{r} + \frac{1}{rq}$. ⌋

Für $0 < s < z$ mit $(s,z)=1$ betr. $\mathcal{P} := \{p \in \mathbb{P};\ p \equiv -1\,(z),\ p \equiv -s\,(z)\}$, $P(\xi) := \prod_{\substack{p<\xi \\ p \in \mathcal{P}}} p$.

Setze

$$A(s) := \#\{n \le x;\ n \equiv s\,(z) \text{ und } a(z,n) > 2\}$$
$$\le \#\{u \le \tfrac{x}{z};\ a(z, zu+s) > 2\}$$
$$\le \#\{u \le y;\ p \nmid zu+s \text{ für } p \mid P(\xi)\} =: B(s), \quad \text{wo } y := \tfrac{x}{z}.$$

Sei $\mathcal{A} := \{zu+s;\ u \le y\}$, dann ist $B(s) = S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, \xi) = \sum_{\substack{u \le y \\ (zu+s, P(\xi))=1}} 1$.

Da $(s,z)=1$, ist auch $(d,z)=1$ für $d \mid P(\xi)$,

die Kongruenz $zu+s \equiv 0\,(d)$ hat dann genau eine Lsg. mod z für u.

Somit ist $\#\mathcal{A}_d = \frac{y}{d} + R_d$ mit $|R_d| \le 1$, setze $g(d) := \frac{1}{d}$.

Mit dem Selberg-Sieb folgt $B(s) \le \frac{y}{F(\xi)} + \sum_{\substack{d<\xi^2 \\ d \mid P(\xi)}} 3^{\nu(d)} \ll \frac{y}{F(\xi)} + \xi^2 \log^3 \xi$, s. Anm. 3.

Wir haben $f(k) = \sum_{d \mid k} \frac{\mu(d)}{g(k/d)} = \sum_{d \mid k} \mu(d) \cdot \frac{k}{d} = (\mu * id)(k) = \varphi(k)$,

also ist $F(\xi) = \sum_{\substack{d \mid P(\xi) \\ d < \xi}} \frac{1}{\varphi(d)}$.

Weiter gilt

$$\prod_{p \mid P(\xi)} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \prod_{p \mid P(\xi)} \left(1 + \frac{1}{\varphi(p)}\right) = \sum_{\substack{d \mid P(\xi) \\ d < \xi}} \frac{1}{\varphi(d)} + \sum_{\substack{d \mid P(\xi) \\ d \ge \xi}} \frac{1}{\varphi(d)}$$

$$\le F(\xi) + \frac{1}{\varphi(p')} \sum_{t \mid P(\xi)} \frac{1}{\varphi(t)} = F(\xi) + \frac{1}{\varphi(p')} \prod_{p \mid P(\xi)} \frac{1}{1-\frac{1}{p}},$$

d hat mind. 2 versch. Primteiler

p' die kl. PZ >2 aus $\mathcal{P}$ ← ex. wegen DPZS, da $\xi \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$

also ist $F(z) \geq \underbrace{\left(1-\frac{1}{\varphi(p')}\right)}_{\substack{\geq 1-\frac{1}{\varphi(3)}=\frac{1}{2}, \\ \text{da } p'>2}} \cdot \prod_{p \mid P(\xi)} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$,

mit $\log \prod_{p \mid P(\xi)} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} \geq \sum_{p \mid P(\xi)} \frac{1}{p} \geq \frac{\delta}{\varphi(z)} \cdot \log\log \xi + O(1)$, wo $\delta = \begin{cases} 1, & s \equiv 1 (z) \\ 2, & s \not\equiv 1 (z) \end{cases}$

$\underbrace{p \mid P(\xi)}$ $\rightarrow p < \xi$ und $\left.\begin{array}{l} p \equiv -1 (z) \\ \text{oder } p \equiv -s (z) \end{array}\right\}$ eine Restkl. für $s \equiv 1$ (z), sonst 2 Restkl.

$\Rightarrow F(z) \gg (\log \xi)^{\delta/\varphi(z)}$. Setze $\xi := y^{\frac{1}{2}} \cdot (\log y)^{-\varrho}$, $\varrho := \frac{3}{2} + \frac{\delta}{2\varphi(y)}$, $y = \frac{x}{z}$.

$\Rightarrow B(s) \ll \frac{y}{(\log y)^{\delta/\varphi(z)}} + \frac{y}{(\log y)^{2\varrho-3}} = \frac{y}{(\log y)^{\delta/\varphi(z)}} \ll_z \frac{x}{(\log x)^{\delta/\varphi(z)}}$.

$\Rightarrow \#\{n \leq x;\ (n,z)=1,\ a(z,n)>2\} = \sum_{\substack{0<s<z \\ (s,z)=1}} A(s) \leq \sum_{\substack{0<s<z \\ (s,z)=1}} B(s) \leq \varphi(s) \max_{\substack{0<s<z \\ (s,z)=1}} B(s)$

$\ll_z \frac{x}{(\log x)^{1/\varphi(z)}}$. $\square$

---

7. Anwendung: Für welche $n \leq x$ ist jede Gruppe der Ordnung n zyklisch?

Mit Sätzen der Gruppentheorie folgt:

$\big((n, \varphi(n)) = 1 \Leftrightarrow \forall$ Gruppen G, $\#G = n$: G zyklisch$\big)$ ⌈Bew. später⌋

Wollen solche $n \leq x$ zählen:

Satz (Erdős): $\#\{n \leq x;\ (n,\varphi(n))=1\} \sim \frac{e^{-\gamma} x}{\log\log\log x}$ für $x \to \infty$, γ = Eulersche Konst.

Dazu stellen wir zunächst einige Hilfslemmas bereit, deren Beweise wir nur andeuten:

Lemma 1: Sei $0 < \varepsilon < 1$, $p < (\log\log x)^{1-\varepsilon}$. Dann ist
$\sum_q{}' \frac{1}{q} \gg \frac{\log\log x}{p} > (\log\log x)^{\varepsilon/2}$, wobei $\sum_q{}'$ über die $q \equiv 1 (p)$, $q < x^{\frac{1}{(\log\log x)^2}}$, geht.
⌈Siegel-Walfisz + partielle Σ⌋

Lemma 2: p prim $\Rightarrow \sum_{\substack{q \leq x \\ q \equiv 1 (p)}} \frac{1}{q} \ll \frac{1}{p}(\log\log x + \log p)$. ⌈Aus Brun-Titchmarsh + part. Σ⌋

Lemma 3: Sei $0<\varepsilon<1$, $z\le(\log\log x)^{1+\varepsilon}$. Dann: $\#\{m\le x;\ p|m\Rightarrow p>z\}=(1+o(1))\frac{e^{-\gamma}x}{\log z}$.

⌜Mit dem Sieb des Eratosthenes, unter Verwendung von $\prod_{p<z}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{e^{-\gamma}}{\log z}\left(1+O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right)$⌟

Lemma 4: Sei $0<\varepsilon<1$, $p\le(\log\log x)^{1+\varepsilon}$. Dann: $\#\{m\le x;\ p|m\ \&\ (p'|m\Rightarrow p'\ge p)\}=(1+o(1))\cdot\frac{e^{-\gamma}x}{p\log p}$.

⌜Korollar aus Lemma 3.⌟

Beweis des Satzes: Sei $A(x):=\#\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}:=\{n\le x;\ (n,\varphi(n))=1\}$,

teile $\mathcal{A}$ auf in Mengen $\mathcal{A}_p:=\{n\le x;\ (n,\varphi(n))=1$, kl. Primteiler von n ist $p\}$,

so daß $A(x)=\sum_p\#\mathcal{A}_p=:\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$, wo Σ_1 über $p<(\log\log x)^{1-\varepsilon}$ geht,

Σ_2 über $(\log\log x)^{1-\varepsilon}<p<(\log\log x)^{1+\varepsilon}$,

Σ_3 über $p>(\log\log x)^{1+\varepsilon}$ für ε fest.

Die Zahlen in $\#\mathcal{A}_p$ enthalten keinen Primteiler $q\equiv1\ (p)$. $\boxed{\boxtimes}$ (Sonst $p|(n,\varphi(n))$ $\lightning$)

$$\Rightarrow\ \#\mathcal{A}_p \underset{\text{Bruns Sieb}}{\ll} \frac{x}{p}\prod_{\substack{q\equiv1(p)\\ q<x^{1/(\log\log x)^2}}}\left(1-\frac{1}{q}\right) \underset{\mathcal{L}.1}{\ll} \frac{x}{p}\exp\left(-(\log\log x)^{\varepsilon/2}\right),$$

also ist $\Sigma_1=o\left(\frac{x}{\log\log\log x}\right)$, $\Sigma_2\overset{\mathcal{L}.4}{\ll}\frac{x}{\log\log\log x}\sum_p{}'\frac{1}{p}$ mit dem Summ.-bereich für Σ_2,

wobei $\sum_p{}'\frac{1}{p}\ll\varepsilon$, also $\Sigma_2\ll\varepsilon\frac{x}{\log\log\log x}$ folgt.

Mit $\mathcal{L}.3$ folgt

$$\Sigma_3\le(1+o(1))\frac{e^{-\gamma}x}{(1+\varepsilon)\log\log\log x},$$ da alle Primteiler von m in Σ_3 größer $(\log\log x)^{1+\varepsilon}$.

$$\text{Weiter ist }\ \Sigma_3\ge(1+o(1))\frac{e^{-\gamma}x}{(1+\varepsilon)\log\log\log x}-\overset{\text{die m sind quadratfrei}}{\underbrace{\sum_{p>y}\frac{x}{p^2}}_{\ll\frac{x}{\log\log x}}}-\overset{\text{wegen }\boxed{\boxtimes}}{\underbrace{\sum_{p>y}\sum_{\substack{q\equiv1(p)\\ pq\le x}}\frac{x}{pq}}_{\overset{\mathcal{L}.2}{\ll}x\sum_{p>y}\frac{\log\log x+\log p}{p^2}\ll\frac{x}{(\log\log x)^{\varepsilon}}}},\quad y:=(\log\log x)^{1+\varepsilon}.$$

$\square$