§6: Das Selberg-Sieb

Geg. sei folgendes allgemeines Sieb: Sei $\mathcal{A} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ endl. Folge in $\mathbb{N}$, $\#\mathcal{A} = X$, $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}$, $P(z) := \prod_{\substack{p<z \\ p\in\mathcal{P}}} p$ für $z \geq 2$,
für $d \mid P(z)$ sei $\mathcal{A}_d := \{n \leq X;\ d \mid a_n\}$.
Es sei $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) := \#\{n \leq X;\ (a_n, P(z)) = 1\}$
die Siebfunktion.

schreibe auch $a\in\mathcal{A}$ für ein Folgenglied a_n von $\mathcal{A}$

Selberg-Sieb: (Auch Λ^2-Sieb genannt)

Wir nehmen an, daß $\#\mathcal{A}_d = g(d)\,X + R_d$ mit einer mult. Fkt. g gilt, und es sei $0 < g(p) < 1$ für alle $p \in \mathcal{P}$.
Sei $F(z) := \sum_{\substack{d \mid P(z) \\ d<z}} \frac{1}{f(d)}$ mit der Fkt. $f(k) := \sum_{d\mid k} \frac{\mu(d)}{g(k/d)}$.

Dann gilt:

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) \leq \frac{X}{F(z)} + \sum_{\substack{d<z^2 \\ d \mid P(z)}} 3^{\nu(d)} |R_d|, \quad \text{wobei } \nu(d) := \#\{p \mid d\}.$$

Bem.: Diese Version mit dem Term $\frac{X}{F(z)}$ ist in den Anwendungen oft unpraktikabel. Man verwendet eher die folgende Schranke:

Lemma 6.1:

Sei h eine vollständig multiplikative Fkt., d.h. $h(mn) = h(m)h(n)$ $\forall m,n \in \mathbb{N}$, die g auf $\mathcal{P}$ fortsetzt, d.h. so daß gilt: $h(p) = g(p)$ für alle $p \in \mathcal{P}$.
Wir definieren $G(z) := \sum_{\substack{m<z \\ p\mid m \Rightarrow p\in\mathcal{P}}} h(m)$. Dann ist

$$\frac{X}{F(z)} \leq \frac{X}{G(z)} \iff G(z) \leq F(z).$$

Beweis des Lemmas 6.1:

Wir zeigen $F(z) \ge G(z)$: Es ist mit $\mathcal{D} := \{k \mid P(z);\ 1 \le k < z\}$

(unter Beachten von $f(k) = \sum_{d|k} \frac{\mu(d)}{g(k/d)} \underset{\substack{g \text{ mult.},\\ k \in \mathcal{D} \text{ qu.frei}}}{=} \frac{1}{g(k)} \sum_{d|k} \mu(d) g(d) = \frac{1}{g(k)} \prod_{p|k} (1-g(p))$):

$$F(z) = \sum_{k\in\mathcal{D}} \frac{1}{f(k)} = \sum_{k\in\mathcal{D}} g(k) \prod_{p|k} \frac{1}{1-g(p)} = \sum_{k\in\mathcal{D}} h(k) \prod_{p|k} \underbrace{\frac{1}{1-h(p)}}_{\substack{= \sum_{k\in\mathcal{D}} h(p)^r, \\ \text{da } 0<h(p)<1}}$$

$$\underset{h \text{ vollst.m.}}{=} \sum_{k\in\mathcal{D}} h(k) \prod_{p|k} \sum_{r=0}^{\infty} h(p^r) = \sum_{k\in\mathcal{D}} h(k) \sum_{\substack{l\ge 1\\ p|l \Rightarrow p|k}} h(l)$$

$$= \sum_{k\in\mathcal{D}} \sum_{\substack{l\ge 1\\ p|l \Rightarrow p|k}} h(kl) = \sum_{k\in\mathcal{D}} \sum_{\substack{m\ge 1\\ k|m\\ p|\frac{m}{k} \Rightarrow p|k}} h(m)\cdot 1 = \sum_{m\ge 1} h(m) \cdot \Big(\sum_{\substack{k\in\mathcal{D}\\ k|m\\ p|\frac{m}{k} \Rightarrow p|k}} 1 \Big)$$

$$\ge \sum_{\substack{m<z\\ p|m \Rightarrow p\in\mathcal{P}}} h(m) \cdot \underbrace{\Big(\sum_{\substack{k\in\mathcal{D}\\ k|m\\ p|\frac{m}{k} \Rightarrow p|k}} 1 \Big)}_{\text{ist } \ge 1, \text{ da Radikal}(m) = k \text{ Summand}} \ge \sum_{\substack{m<z\\ p|m \Rightarrow p\in\mathcal{P}}} h(m) = G(z).$$

$\square$

Beweis des Selberg-Siebs:

Für $d \mid P(z)$ betr. $\lambda(d) \in \mathbb{R}$ mit $\lambda(1) = 1$ und $\lambda(d) = 0$ für alle $d \ge z$.
Damit ist $\Big(\sum_{d|(n,P(z))} \lambda(d)\Big)^2 \ge 0$ für $n \in \mathcal{A}$ und $\Big(\sum_{d|(n,P(z))} \lambda(d)\Big)^2 = 1$ für $(n, P(z)) = 1$,
so daß folgt:

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = \sum_{\substack{n\in\mathcal{A}\\ (n,P(z))=1}} 1 \le \sum_{n\in\mathcal{A}} \Big(\sum_{d|(n,P(z))} \lambda(d) \Big)^2 = \sum_{n\in\mathcal{A}} \sum_{\substack{d_1|n\\ d_1|P(z)}} \sum_{\substack{d_2|n\\ d_2|P(z)}} \lambda(d_1)\lambda(d_2)$$

$$= \sum_{d_1,d_2|P(z)} \lambda(d_1)\lambda(d_2) \sum_{\substack{n\in\mathcal{A}\\ d_1|n,\ d_2|n}} 1 = \sum_{d_1,d_2|P(z)} \lambda(d_1)\lambda(d_2) \sum_{\substack{n\in\mathcal{A}\\ [d_1,d_2]|n}} 1$$

Bem.: $[d_1, d_2] := \mathrm{kgV}(d_1, d_2)$

$$= \sum_{d_1,d_2|P(z)} \lambda(d_1)\lambda(d_2) \cdot \#\mathcal{A}_{[d_1,d_2]} = \sum_{d_1,d_2|P(z)} \lambda(d_1)\lambda(d_2) \cdot \big(g([d_1,d_2]) X + R_{[d_1,d_2]} \big)$$

$$= X \sum_{d_1,d_2|P(z)} g([d_1,d_2]) \lambda(d_1)\lambda(d_2) + \sum_{d_1,d_2|P(z)} \lambda(d_1)\lambda(d_2) R_{[d_1,d_2]}$$

Wir betrachten erst den Hauptterm:

Für eine mult. Fkt. g gilt $g([d,t])\,g((d,t)) = g(d)\,g(t)$, ⌈Bew. über PFZ⌋

damit formen wir den Hauptterm um in

$$X\cdot \sum_{\substack{d_1,d_2<z\\ d_1,d_2|P(z)}} \frac{g(d_1)g(d_2)}{g((d_1,d_2))}\cdot\lambda(d_1)\lambda(d_2) =: X\cdot Q.$$ wollen die λ_i geeignet wählen, daß Q minimal wird.

Dazu sei $\mathcal{D} := \{k\,|\,P(z);\ 1\le k<z\}$, dies erfüllt: $(k\,|\,d\in\mathcal{D} \Rightarrow k\in\mathcal{D})$,

d.h. $\mathcal{D}$ ist teilerabgeschlossen. Für $k\in\mathcal{D}$ ist $0<g(k)<1$, und betr. für $k\in\mathcal{D}$

$$f(k) = \sum_{d|k}\frac{\mu(d)}{g(k/d)} \underset{\substack{\uparrow\\ g\text{ mult.,}\\ k\in\mathcal{D}\text{ qu'frei}}}{=} \frac{1}{g(k)}\sum_{d|k}\mu(d)g(d) = \frac{1}{g(k)}\prod_{p|k}(1-g(p)).$$

Dann ist $f(k)>0$ und f mult. auf $\mathcal{D}$. Möbiusinversion

zeigt: $\frac{1}{g(k)} = \sum_{d|k} f(d)$. Somit gilt:

$$Q = \sum_{d_1,d_2\in\mathcal{D}} \frac{1}{g((d_1,d_2))}\cdot g(d_1)\lambda(d_1)g(d_2)\lambda(d_2) = \sum_{d_1,d_2\in\mathcal{D}}\ \sum_{k|d_1,d_2} f(k)g(d_1)\lambda(d_1)g(d_2)\lambda(d_2)$$

$$= \sum_{k\in\mathcal{D}} f(k) \sum_{\substack{d_1,d_2\in\mathcal{D}\\ k|d_1,k|d_2}} g(d_1)\lambda(d_1)g(d_2)\lambda(d_2) = \sum_{k\in\mathcal{D}} f(k)\cdot\Big(\underbrace{\sum_{\substack{d\in\mathcal{D}\\ k|d}} g(d)\lambda(d)}_{=:y_k}\Big)^2,$$

d.h. Q ist eine quadratische Form in den y_k,

die selbst linear in den $\lambda(d)$ sind.

alternative Möbius-inversion auf $\mathcal{D}$ mit y_k

$$g(d)\lambda(d) = \sum_{\substack{k\in\mathcal{D}\\ d|k}} \mu\left(\frac{k}{d}\right) y_k = \mu(d)\sum_{\substack{k\in\mathcal{D}\\ d|k}} \mu(k)y_k, \quad ⊗$$

für $d=1$ folgt insb., daß $\boxed{\sum_{k\in\mathcal{D}}\mu(k)y_k = 1}$ ⊗ ist.

Betr. nun $F(z) := \sum_{k\in\mathcal{D}} \frac{1}{f(k)}$. Wollen Q minimieren unter der linearen Nebenbedingung ⊗

Dazu dieses

<u>Hilfslemma 1</u>: $a_1,\dots,a_m>0$, $b_1,\dots,b_m\in\mathbb{R}$. Das Minimum von $Q(y_1,\dots,y_m) := a_1y_1^2+\dots+a_my_m^2$ unter der NB $b_1y_1+\dots+b_my_m=1$ ist gleich $m = \left(\sum_{i=1}^m \frac{b_i^2}{a_i}\right)^{-1}$ und wird genau bei $y_i = m\frac{b_i}{a_i}$, $i=1,\dots,m$, angenommen.

⌈$1 = (\sum b_iy_i)^2 = (\sum \frac{b_i}{\sqrt{a_i}}\cdot\sqrt{a_i}y_i)^2 \underset{CS}{\le} (\sum\frac{b_i^2}{a_i})\cdot(\sum a_iy_i^2) \Rightarrow$ u.S. für $\sum a_iy_i^2$, und

Gleichheit $\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}: \sqrt{a_i}y_i = \frac{tb_i}{\sqrt{a_i}} \Leftrightarrow y_i = t\frac{b_i}{a_i} \rightsquigarrow 1 = \sum b_iy_i = t\sum\frac{b_i^2}{a_i} = \frac{t}{m} \Leftrightarrow t=m.$⌋

In unserer Situation ist das Minimum von Q gleich $\left(\sum_{k\in D}\frac{\mu(k)^2}{f(k)}\right)^{-1} = \left(\sum_{k\in D}\frac{1}{f(k)}\right)^{-1} = \frac{1}{F(z)}$
und wird bei $y_k = \frac{\mu(k)}{F(z)f(k)}$ angenommen. Zur R-Absch.:

$\rightsquigarrow$ Ermittlung der $\lambda(d)$:

$$\otimes \rightsquigarrow \lambda(d) = \frac{\mu(d)}{g(d)}\sum_{\substack{k\in D\\ d|k}}\mu(k)y_k = \frac{\mu(d)}{g(d)}\sum_{\substack{dl<z\\ dl|P(z)}}\mu(dl)y_{dl} = \frac{\mu(d)}{g(d)}\sum_{\substack{l<\frac{z}{d}\\ dl|P(z)}}\mu(dl)\cdot\frac{\mu(dl)}{F(z)f(dl)}$$

$$= \frac{\mu(d)}{f(d)g(d)F(z)}\underbrace{\sum_{\substack{l<\frac{z}{d}\\ dl|P(z)}}\frac{1}{f(l)}}_{=:F_d(z)}$$

$\mu^2(dl)=1$ für $(d,l)=1$ bei $dl|P(z)$

Zeigen, daß $|\lambda(d)|\le 1$ für $d|P(z)$: Haben

$$F(z) = \sum_{k\in D}\frac{1}{f(k)} = \sum_{l|d}\sum_{\substack{k\in D\\ (k,d)=l\ (\rightsquigarrow lm=k)}}\frac{1}{f(k)} = \sum_{l|d}\sum_{\substack{lm<z\\ lm|P(z)\\ (lm,d)=l}}\frac{1}{f(lm)}$$

$$= \sum_{l|d}\frac{1}{f(l)}\sum_{\substack{m<z/l\\ lm|P(z)\\ (m,d/l)=1}}\frac{1}{f(m)} \ge \sum_{l|d}\frac{1}{f(l)}\sum_{\substack{m<z/l\\ m|P(z)\\ (m,d)=1}}\frac{1}{f(m)}$$

$$= \sum_{l|d}\frac{1}{f(l)}\sum_{\substack{m<z/l\\ dm|P(z)}}\frac{1}{f(m)} \ge \sum_{l|d}\frac{1}{f(l)}\underbrace{\sum_{\substack{m<z/d\\ dm|P(z)}}\frac{1}{f(m)}}_{=F_d(z)>0} = F_d(z)\sum_{l|d}\frac{1}{f(l)}$$

$$= \frac{F_d(z)}{f(d)}\sum_{l|d}f\left(\frac{d}{l}\right) = \frac{F_d(z)}{f(d)g(d)}, \text{ also ist } |\lambda(d)| = \frac{F_d(z)}{f(d)g(d)F(z)} \le 1.$$

Zur Abschätzung des Fehlerterms:

Hilfslemma 2: Für $d\in\mathbb{N}$, $\mu^2(d)=1$, gibt es genau $3^{\nu(d)}$ viele geordnete Paare $d_1,d_2\in\mathbb{N}$ mit $[d_1,d_2]=d$. ⌜Für jeden Primteiler p von d gibt es die 3 Möglichkeiten $(p|d_1, p\nmid d_2) \vee (p\nmid d_1, p|d_2) \vee (p|d_1, p|d_2)$ ⌟

Sind $d_1,d_2<z$, ist $d=[d_1,d_2]<z^2$. Mit $d_1,d_2|P(z)$ ist d qu'frei und $d|P(z)$.

Somit ist der Fehler:

$$\left|\sum_{\substack{d_1,d_2<z\\ d_1,d_2|P(z)}}\lambda(d_1)\lambda(d_2)R_{[d_1,d_2]}\right| \le \sum_{\substack{d_1,d_2<z\\ d_1,d_2|P(z)}}|R_{[d_1,d_2]}| \le \sum_{\substack{d<z^2\\ d|P(z)}}3^{\nu(d)}|R_d|.$$

□

Wir bringen nun verschiedene Anwendungen dieses ~~recht starken~~ Siebsatzes. Die erste betrifft das Goldbachproblem:

1. Anwendung: Sei $m \in \mathbb{N}$, $2 | m$, und $R(m) := \#\{(p_1, p_2) \in \mathbb{P}^2 ; m = p_1 + p_2\}$ die Anzahl der Darstellungen von m als Summe zweier PZen (Goldbach-Problem). Dann ist $R(m) \ll \frac{m}{(\log m)^2} \cdot \prod_{p | m} (1 + \frac{1}{p})$.

Bem.: Es gilt $m \prod_{p|m} (1+\frac{1}{p}) \leq m \sum_{d|m} \frac{\mu^2(d)}{d} \leq \sum_{d|m} \frac{m}{d} = \sum_{d|m} d = \sigma(m)$, der Teilersummenfkt., also $\prod_{p|m} (1+\frac{1}{p}) \leq \frac{\sigma(m)}{m}$, was $\ll \log m$ ist. Man kann auch $\prod_{p|m} (1+\frac{1}{p}) \ll \log\log m$ zeigen.

Bew.: Betr. $\mathcal{A} = (a_k)_{k \leq m}$ mit $a_k := k(m-k)$, also $\#\mathcal{A} = m$. Sei $\mathcal{P} := \mathbb{P}$, $P(z) := \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p < z}} p$ für $2 < z \leq \sqrt{m}$, und wie üblich $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) := \#\{m ; (a_m, P(z)) = 1\}$. Dann ist

$$R(m) = \#\{p \in \mathbb{P} ; p \leq m, m-p \in \mathbb{P}\} \leq 2\sqrt{m} + S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z).$$

Schätzen nun $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)$ mit dem Selberg-Sieb ab:

Haben: $\#\mathcal{A}_d = \#\{k \leq m ; d | a_k = k(m-k)\}$,

wobei $a_k \equiv 0 \ (d) \Leftrightarrow \underbrace{(k \equiv 0 \ (p) \vee k \equiv m \ (p)}_{\text{2 Restklassen für } p \nmid m, \text{ sonst 1 Restklasse}} \text{ für alle } p | d)$ gilt.

Hat d genau ℓ viele Primteiler $p \nmid m$, gibt es laut CRS genau 2^ℓ viele p.w.v. Kongruenzklassen $x_1, \dots, x_{2^\ell}$ mod d mit:

$$a_k \equiv 0 \ (d) \Leftrightarrow k \equiv x_i \ (d) \text{ für ein } 1 \leq i \leq 2^\ell$$

Es folgt: $\#\mathcal{A}_d = \#\{k \leq m ; a_k \equiv 0 (d)\} = \sum_{\substack{k \leq m \\ k \equiv x_1 (d)}} 1 + \dots + \sum_{\substack{k \leq m \\ k \equiv x_{2^\ell} (d)}} 1$

$$= 2^\ell \cdot \lfloor \tfrac{m}{d} \rfloor = 2^\ell \cdot \frac{m}{d} + O(2^\ell) =: g(d) \cdot m + R_d,$$

wobei wir $g(p) := \begin{cases} \frac{2}{p}, & \text{falls } p \nmid m, \\ \frac{1}{p}, & \text{falls } p | m, \end{cases}$ definieren und vollst. mult. fortsetzen.
(damit ist $h = g$)

Für $2 | m$ ist stets $0 < g(p) < 1$ für alle $p \in \mathcal{P}$.

Weiter ist $R_d \ll 2^{\ell} \le 2^{\omega(d)}$. Mit dem Selberg-Sieb folgt nun:

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) \le \frac{n}{G(z)} + \sum_{\substack{d<z^2\\ d\mid P(z)}} 3^{\omega(d)}\,|R_d| \quad \text{mit } G(z):=\sum_{m<z} g(m).$$

Zur Abschätzung von $G(z)$ nach unten:

Sei $m=\prod_{i\le h} p_i^{r_i}\prod_{j\le \ell} q_j^{s_j}$ mit $p_i\mid n$, $q_j\nmid n$ die PFZ von $m\in\mathbb{N}$.

Dann ist

$$g(m)=\prod_{i\le h}\frac{1}{p_i^{r_i}}\prod_{j\le\ell}\frac{2^{s_j}}{q_j^{s_j}} = \frac{2^{s_1+\dots+s_\ell}}{m} \ge \frac1m\cdot\prod_{j\le\ell}(s_j+1) =: \frac1m\cdot d_n(m)$$

für die modifizierte Teileranzahlfunktion $d_n(m):=\#\{d\mid m;\ (d,n)=1\}$.

Es folgt $G(z)=\sum_{m<z} g(m)\ge\sum_{m<z}\frac{d_n(m)}{m}$. Mit der Identität

$$\prod_{p\mid n}\left(1-\frac1p\right)^{-1}=\sum_{\substack{t\ge1\\ p\mid t\Rightarrow p\mid n}}\frac1t$$

folgt:

$$\prod_{p\mid n}\left(1-\frac1p\right)^{-1}\cdot G(z)\ge\sum_{m<z}\frac{d_n(m)}{m}\sum_{\substack{t\ge1\\ p\mid t\Rightarrow p\mid n}}\frac1t = \sum_{m<z} d_n(m)\sum_{\substack{w\ge1\\ m\mid w\\ p\mid \frac wm \Rightarrow p\mid n}}\frac1w$$

$$=\sum_{w\ge1}\frac1w\sum_{\substack{m<z\\ m\mid w\\ p\mid \frac wm\Rightarrow p\mid n}} d_n(m) \ge \sum_{w<z}\frac1w \underbrace{\sum_{\substack{m\mid w\\ p\mid \frac wm\Rightarrow p\mid n}} d_n(m)}_{\overset{!}{=}\, d(w)}$$

⌈Bew. mit PFZ von $m\mid w$⌋

Somit: $\prod_{p\mid n}\left(1-\frac1p\right)^{-1}G(z)\ge\sum_{w<z}\frac{d(w)}{w}\gg(\log z)^2\gg(\log n)^2$, wenn wir $z:=n^{1/8}$ wählen.

partielle Σ aus $\sum_w d(w)$-Formel

Für den Hauptterm in der $S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)$-Abschätzung ergibt sich

$$\frac{n}{G(z)}\ll\frac{n}{(\log n)^2}\prod_{p\mid n}\left(1-\frac1p\right)^{-1}=\frac{n}{(\log n)^2}\underbrace{\prod_{p\mid n}\left(1-\frac1{p^2}\right)^{-1}}_{\text{kgt.}}\cdot\prod_{p'\mid n}\left(1+\frac1{p'}\right)\ll\frac{n}{(\log n)^2}\cdot\prod_{p\mid n}\left(1+\frac1p\right).$$

Zur Fehlertermabschätzung: Sei $E:=\sum_{\substack{d<z^2\\ d\mid P(z)}}3^{\omega(d)}|R_d|\ll\sum_{d<z^2}6^{\omega(d)}$.

Mit

$$6^{\omega(d)}=\left(2^{\omega(d)}\right)^{\frac{\log 6}{\log 2}}\le d^{\frac{\log 6}{\log 2}}<z^{2\frac{\log 6}{\log 2}} \text{ folgt } E\ll\sum_{d<z^2} z^{2\frac{\log 6}{\log 2}}<z^{2+2\frac{\log 6}{\log 2}}<z^{7.2}=n^{\frac{9}{10}},$$

damit ist der Fehlerterm von kleinerer Größenordnung als der Hauptterm.

Es folgt die Beh. □