§5: Das Brunsche Sieb

Bisher haben wir
$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = \#\Big(\mathcal{A} \setminus \bigcup_{p \mid P(z)} \mathcal{A}_p\Big) \underset{\text{IEP}}{=} \sum_{d \mid P(z)} \mu(d)\, \#\mathcal{A}_d$$
verwendet und eine Approximationsformel für $\#\mathcal{A}_d$ eingesetzt.
Bei der Fehlerabschätzung ging die Information über die Oszillation mit μ durch den Absolutbetrag verloren.
Die Idee beim Brunschen Sieb ist es, dies wie folgt zu vermeiden.
Wir beginnen mit der Identität
$$\sum_{k \leq r} (-1)^k \binom{v}{k} = (-1)^r \binom{v-1}{r},$$
die aus Koeffizientenvergleich in $(1-x)^{-1} \cdot (1-x)^v = (1-x)^{v-1}$ folgt.

Für $m \in \mathbb{N}$ sei $N := \operatorname{rad} m := \prod_{p \mid m} p$ das <u>Radikal</u> von m.
Somit gilt für $v = v(m) := \#\{p \mid m\}$ und jedes $0 \leq r \leq v(m)-1$, daß
$$\sum_{\substack{d \mid m \\ v(d) \leq r}} \mu(d) = \sum_{\substack{d \mid N \\ v(d) \leq r}} \mu(d) = \sum_{k \leq r} (-1)^k \binom{v(m)}{k} = (-1)^r \binom{v(m)-1}{r}.$$
Setzen wir $\mu_r(d) := \begin{cases} \mu(d), & \text{falls } v(d) \leq r \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ und $\Psi_r(m) := \sum_{d \mid m} \mu_r(d)$,
so folgt
$$\Psi_r(m) = (-1)^r \binom{v(m)-1}{r},$$
was ≥ 0 ist für $2 \mid r$ und ≤ 0 für $2 \nmid r$.
Daher gilt
$$\Psi_{2r+1}(m) \leq \sum_{d \mid m} \mu(d) \leq \Psi_{2r}(m),$$
und
$$\Psi_{2r+1}(m) = \sum_{\substack{d \mid m \\ v(d) \leq 2r}} \mu(d) + \sum_{\substack{d \mid m \\ v(d) = 2r+1}} \mu(d) = \Psi_{2r}(m) + O\Big(\sum_{\substack{d \mid m \\ v(d) = 2r+1}} |\mu(d)|\Big),$$
also gilt
$$\sum_{d \mid m} \mu(d) = \Psi_r(m) + O\Big(\sum_{\substack{d \mid m \\ v(d) = r+1}} |\mu(d)|\Big),$$

die Idee ist nun, im Eratosthenes-Sieb mit $\Psi_r(m)$ anstelle $\sum_{d \mid m} \mu(d)$ zu arbeiten, um bessere Fehlerabschätzungen zu erhalten. $\leadsto$ die $d \mid m$ mit $v(d) = r+1$ sind weniger als die $d \mid m$!
Dies liefert den folgenden Sieb-Satz:

Bruns „reines Sieb": Sei $\mathcal{A}\subseteq\{n\le x\}$, $\mathcal{P}\subseteq\mathbb{P}$, $\mathcal{A}_p=\{a\in\mathcal{A};\ p|a\}$, $\mathcal{A}_1:=\mathcal{A}$, $P(z):=\prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ p<z}} p$ und $\forall d|P(z): \mathcal{A}_d:=\bigcap_{p|d}\mathcal{A}_p$, $S(\mathcal{A},\mathcal{P},z):=\#\Big(\mathcal{A}\setminus\bigcup_{p|P(z)}\mathcal{A}_p\Big)$.

Weiter ex. mult. Fkt. ω mit $\#\mathcal{A}_d=\frac{\omega(d)}{d}\cdot X+R_d$ für alle $d|P(z)$, $X:=\#\mathcal{A}$.

Es gelten folgende Voraussetzungen:

(1) $\forall d|P(z): |R_d|\le\omega(d)$

(2) $\exists\, C>0\ \forall p\in\mathcal{P}: \omega(p)<C$

(3) $\exists\, C_1,C_2>0: \sum_{\substack{p<z\\ p\in\mathcal{P}}}\frac{\omega(p)}{p}<C_1\log\log z+C_2$.

Dann gilt:

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)=X\,W(z)\cdot\left(1+O\left((\log z)^{-\eta\log\eta}\right)+O\left(z^{\eta\log\log z}\right)\right),$$

wo $W(z):=\prod_{p|P(z)}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)$. Ist insb. $\log z\le c\,\frac{\log x}{\log\log x}$ für genügend kleines c, erhalten wir $S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)=X\,W(z)\cdot(1+o(1))$.

Beweis: Ist $r\le\nu(n)$, folgt: es ex. ein $|\theta|\le 1$ mit

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\sum_{\substack{d|n\\ \nu(d)\le r}}\mu(d)+\theta\sum_{\substack{d|n\\ \nu(d)=r+1}}\mu(d).$$

Damit berechnen wir die Siebfunktion:

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)=\sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ (a,P(z))=1}}1=\sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ d|(a,P(z))}}\mu(d),\ \text{da}\ \mu*\mathbb{1}=\varepsilon$$

$$\Rightarrow S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)=\sum_{a\in\mathcal{A}}\sum_{d|(a,P(z))}\mu(d)=\sum_{a\in\mathcal{A}}\Big(\sum_{d|(a,P(z))}\mu_r(d)+\theta\sum_{\substack{d|(a,P(z))\\ \nu(d)=r+1}}\mu(d)\Big)$$

$$=\sum_{d|P(z)}\mu_r(d)\,\#\mathcal{A}_d+O\Big(X\cdot\frac{\pi(z)^{r+1}}{(r+1)!}\Big)\quad \text{da}\ \binom{\pi(z)}{r+1}\le\frac{\pi(z)^{r+1}}{(r+1)!}$$

Einsetzen der Näherungsformel für $\#\mathcal{A}_d$ liefert den Hauptterm

$$X\cdot\sum_{d|P(z)}\mu_r(d)\cdot\frac{\omega(d)}{d}=X\sum_{t|P(z)}\psi_r(t)\,\frac{\omega(t)}{t}\sum_{d|\frac{P(z)}{t}}\mu(d)\,\frac{\omega(d)}{d}$$

$$\boxed{\psi_r(n)=\sum_{d|n}\mu_r(d)}$$

Möbius-inversion $\rightsquigarrow$ $\mu_r(d)=\sum_{t|d}\mu\left(\frac{d}{t}\right)\psi_r(t)$

$$=X\,W(z)\sum_{t|P(z)}\frac{\psi_r(t)\,\omega(t)}{\Omega(t)},$$

wo $\Omega(d):=\prod_{p|d}(p-\omega(d))$ (berechne $\frac{W(z)}{\Omega(t)}\cdot t$)

Die Aufspaltung $\sum_{t|P(z)}\cdots=1+\sum_{\substack{t|P(z),\\ t>1}}\cdots$ liefert nun den behaupteten Hauptterm $X\,W(z)$; Fehleranalyse: s. [Cojocaru/Murty]. $\square$

Eine genauere Analyse führt auf folgenden Sieb-Satz: (Bew. s. [Cojocaru/Murty])

Bruns Sieb, "scharfe" Version: Geg. ein Sieb wie im reinen Sieb-Satz.
Anstelle obiger Vor. (1)-(3) gelten nun:
(1) $\forall d \mid P(z): |R_d| \le \omega(d)$, (2) $\exists A_1 \ge 1: \ 0 \le \frac{\omega(p)}{p} \le 1 - \frac{1}{A_1}$,
(3) $\exists \kappa > 0, A_2 \ge 1 \ \forall w, \ 2 \le w \le z: \ \sum_{w \le p < z} \frac{\omega(p)}{p} \log p \le \kappa \log\frac{z}{w} + A_2$.
Weiter sei $b \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 < \lambda e^{1+\lambda} < 1$.
Dann gilt: $$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) \le X\, W(z) \cdot \left(1 + 2\frac{\lambda^{2b+1} e^{2\lambda}}{1 - \lambda^2 e^{2+2\lambda}} \exp\left((2b+3)\frac{c_1}{\lambda \log z}\right)\right) + O\left(z^{2b + \frac{2.01}{e^{2\lambda/\kappa} - 1}}\right)$$
und
$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) \ge X\, W(z) \cdot \left(1 - 2\frac{\lambda^{2b+1} e^{2\lambda}}{1 - \lambda^2 e^{2+2\lambda}} \exp\left((2b+2)\frac{c_1}{\lambda \log z}\right)\right) + O\left(z^{2b - 1 + \frac{2.01}{e^{2\lambda/\kappa} - 1}}\right),$$
wo $c_1 := \frac{A_2}{2}\left(1 + A_1\left(\kappa + \frac{A_2}{\log 2}\right)\right)$.

Wir besprechen die folgende Anwendung dieses Satzes auf das Zwillingsproblem:

Satz 5.1: Für $x \to \infty$ ist
$$\#\{n \le x;\ n \text{ und } n+2 \text{ haben höchstens } 7 \text{ Primfaktoren}\} \gg \frac{x}{\log x}$$

Beweis:
Betr. $\mathcal{A} = \{n(n+2);\ n \le x\}$, $X = x$, $\mathcal{P} = \mathbb{P}$.
Möchten die Elemente in $\mathcal{A}$ zählen, die frei von Primfaktoren $< z$ sind,
daher haben wir $\omega(2) = 1$ und $\omega(p) = 2$ für $p > 2$ zu setzen.
Die Vor. sind erfüllt mit $A_0 = \kappa = 2$, $A_1 = 3$, und für $b = 1$
erhalten wir als untere Schranke für die Siebfunktion:
$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) > \frac{1}{2} x \prod_{2 < p < z}\left(1 - \frac{2}{p}\right)\left(1 - \frac{2\lambda^2 e^{2\lambda}}{1 - \lambda^2 e^{2+2\lambda}} \underbrace{\exp\left(\frac{4c_1}{\lambda \log z}\right)}_{= 1 + O\left(\frac{1}{\log z}\right) \text{ für } z \to \infty}\right) + O\left(z^{1 + \frac{2.01}{e^{\lambda} - 1}}\right)$$

Wähle λ so, daß $\frac{2\lambda^2 e^{2\lambda}}{1 - \lambda^2 e^{2+2\lambda}} < 1$, nämlich $\lambda e^{\lambda} < \frac{1}{\sqrt{2 + e^2}}$, d.h. $\lambda := \log(1.288)$.
Damit ist $7 > \frac{2.01}{e^{\lambda} - 1}$ und $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) \gg \frac{x}{\log^2 z} + O(z^{\theta})$, $\underline{\underline{\theta < 8}}$.
Die Wahl $z := x^{1/u}$ mit $u < 8$
zeigt dann, daß $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) \gg \frac{x}{(\log x)^2}$,
d.h. für mind. $\frac{x}{(\log x)^2}$ viele Zahlen $n \le x$ haben n und $n+2$ höchst. 7 Primfaktoren. $\square$