§4: Das allgemeine Sieb des Eratosthenes mit Anwendung

Wir formulieren nun einen allgemeinen Eratosthenes-Siebsatz und bringen eine neue Anwendung.

Sei $\mathcal{A} \subseteq \{n \in \mathbb{N};\, n \leq x\}$, $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}$, $P(z) := \prod\limits_{\substack{p<z \\ p\in\mathcal{P}}} p$.

Weiter seien für jede Primzahl $p \in \mathcal{P}$ insgesamt $\omega(p)$ viele Restklassen mod p ausgezeichnet, etwa $r_1, \dots, r_{\omega(p)}$

(Bisher haben wir Vielfache von p, d.h. Zahlen $\equiv 0 \bmod p$, in $\mathcal{A}$ gestrichen. Jetzt wollen wir auch Zahlen anderer Restklassen streichen.)

Dazu sei $\mathcal{A}_p := \{n \in \mathcal{A};\; n \equiv r_i \bmod p \text{ für } \overset{\text{(mind.)}}{\text{ein}}\ i \leq \omega(p)\}$,

weiter $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A}$

und $\mathcal{A}_d := \bigcap\limits_{p \mid d} \mathcal{A}_p$ für jedes $d \mid P(z)$.

Die Werte $\omega(p)$ setzen wir mit

$$\omega(d) := \begin{cases} \prod\limits_{p \mid d} \omega(p), & d \mid P(z) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

zu einer multiplikativen Fkt. zusammen.

Wir nehmen an, daß ein X existiert mit

$$\#\mathcal{A}_d = \frac{\omega(d)}{d} X + R_d \quad \text{für ein } R_d.$$

Unsere Siebfunktion ist jetzt

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) := \#\Big(\mathcal{A} \setminus \bigcup_{p \mid P(z)} \mathcal{A}_p\Big).$$

Über die Siebfunktion bei diesen Daten erhalten wir nun den folgenden, allgemeinen Siebsatz.

Sieb des Eratosthenes:

Es gelte: 1) $|R_d| = O(\omega(d))$

2) Für ein $\kappa \ge 0$ ist $\sum_{p|P(z)} \frac{\omega(p)}{p} \log p \le \kappa \log z + O(1)$

3) Für ein $y>0$ ist $\#\mathcal{A}_d = 0$ für alle $d>y$.

Dann gilt:

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) = X W(z) + O\left(\left(X + \frac{y}{\log z}\right)(\log z)^{\kappa+1} \exp\left(-\frac{\log y}{\log z}\right)\right),$$

wo $W(z) := \prod_{\substack{p\in \mathcal{P}\\ p<z}} \left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)$.

Den Beweis bringen wir nur hier in dieser Online-Version, er ist gelb markiert:

Dazu zunächst drei Lemmas unter Voraussetzung dieses Satzes:

Lemma 4.1: Haben $F(t,z) := \sum_{\substack{d\le t\\ d|P(z)}} \omega(d) \overset{!}{\ll} t(\log z)^{\kappa} \exp\left(-\frac{\log t}{\log z}\right)$.

$1 \le \left(\frac{t}{d}\right)^{\delta}$

Bew.: Mit Rankins Trick ist $F(t,z) \le \sum_{d|P(z)} \omega(d) \left(\frac{t}{d}\right)^{\delta}$ für jedes $\delta>0$.

ω mult. $\Rightarrow$ $F(t,z) \underset{\boxed{1+x\le e^x}}{\le} \exp\left(\delta \log t + \sum_{p|P(z)} \frac{\omega(p)}{p^{\delta}}\right)$. Mit $\delta := 1-\eta$ und $e^x \le 1+xe^x$, $p^{-\delta} = \frac{1}{p} e^{\eta \log p}$,

folgt

$$F(t,z) \le t \exp\Big(-\eta \log t + \underbrace{\sum_{p|P(z)} \frac{\omega(p)}{p}}_{\le \kappa \log\log z + O(1) \text{ wegen Vor. 2) nach part. } \Sigma} + \eta z^{\eta} \overbrace{\sum_{p|P(z)} \frac{\omega(p)}{p} \log p}^{\text{Vor. 2)}}\Big),$$

also

$$F(t,z) \ll t \exp\left(-\eta \log t + \kappa \log\log z + \kappa \eta (\log z) z^{\eta}\right),$$

mit $\eta := \frac{1}{\log z}$ folgt das Ergebnis. □

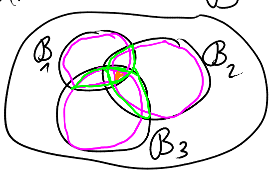
Lemma 4.2: Haben $\sum_{\substack{d|P(z)\\ d>y}} \frac{\omega(d)}{d} \overset{!}{\ll} (\log z)^{\kappa+1} \exp\left(-\frac{\log y}{\log z}\right)$.

Bew.: part. $\Sigma \rightsquigarrow$ l.S. $\ll \int_y^{\infty} \frac{F(t,z)}{t^2}\, dt$, jetzt Lemma 4.1 einsetzen. □

auch: IEP

Lemma 4.3: (Inklusion-Exklusions-Prinzip) Sind $\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_r \subseteq \mathcal{B}$ endl., so ist $\#(\mathcal{B}\setminus\bigcup_{i=1}^{r}\mathcal{B}_i) = \#\mathcal{B} - \sum_i \#\mathcal{B}_i + \sum_{i\neq j}\#\mathcal{B}_i\cap\mathcal{B}_j - \sum_{i,j,k \text{ p.w.v.}}\#\mathcal{B}_i\cap\mathcal{B}_j\cap\mathcal{B}_k + - \dots$ (ohne Bew.)

Illustration dazu: $\mathcal{B}$
$(r=3)$



Nimmt man als Indexmenge eine Primzahlmenge $\mathcal{P}=\{p_1,\dots,p_r\}$, kann man Lemma 4.3 schreiben als:

$$\#(\mathcal{B}\setminus\bigcup_{i=1}^{r}\mathcal{B}_{p_i}) = \sum_{d\mid p_1\cdots p_r}\underbrace{\mu(d)}_{\begin{cases}1, & \text{für } \nu(d) \text{ gerade},\\ -1, & \text{für } \nu(d) \text{ ungerade}\end{cases}}\cdot\#\mathcal{B}_d,$$

wenn $\mathcal{B}_d := \bigcap_{p_i\mid d}\mathcal{B}_{p_i}$.

Jetzt der
Beweis des Siebes des Eratosthenes: Es gilt also:

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) = \#\Big(\mathcal{A}\setminus\bigcup_{p\mid P(z)}\mathcal{A}_p\Big)$$

$$\overset{\text{IEP}}{=} \sum_{\substack{d\mid P(z)\\ d\le y}}\mu(d)\,\#\mathcal{A}_d = \sum_{\substack{d\mid P(z)\\ d\le y}}\mu(d)\frac{X\omega(d)}{d} + \overbrace{O(F(y,z))}^{\text{wegen Vor. 1)}}$$

Vor. 3) $\to d\le y$

Mit den Lemmas 4.1 und 4.2 folgt die Beh. $\square$

Zur Anwendung dieses Eratosthenes-Satzes auf unser bisheriges Primzahl-Standardsieb:

Haben hier $\mathcal{A}=\{n\in\mathbb{N};\, n\le x\}$, $\mathcal{P}=\mathbb{P}$, $\#\mathcal{A}_d = \lfloor \frac{x}{d}\rfloor = \frac{1}{d}\cdot x + R_d$

$\rightsquigarrow \omega(d) := 1$ für $d\mid P(z)$, mit $|R_d|\le 1 \rightsquigarrow$ Vor. 1) ✓

Weiter ist $X=y=x$.

Für Vor. 2): mit $\kappa=1$ ist z.z.: $\sum_{p<z}\frac{1}{p}\log p \overset{!}{\le} \log z + O(1)$, allerdings benötigt man, um dies zu zeigen, bereits eine Absch. der Art $\pi(x)\ll\frac{x}{\log x}$, wie im §3 bemerkt; insofern ist die Anwendung hier eigentlich nicht möglich. Könnte man Vor. 2) auf anderem Wege zeigen, liefert der Satz dann eh nur $\pi(x)\ll\frac{x}{\log x}\cdot\underbrace{(\log\log x)}_{\text{zuviel!}}$

(bei der Wahl $\log z = \varepsilon\frac{\log x}{\log\log x}$, $\varepsilon>0$ klein, da $\prod_{p<z}(1-\frac{1}{p})\le\exp(-\sum_{p<z}\frac{1}{p})\ll\frac{1}{\log z}$.)

Anwendung: Das Zwillingssieb:

Satz 4.1: Die Anzahl der PZen $p \le x$ mit $p+2 \in \mathbb{P}$ ist $\boxed{\ll x \cdot \left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)^2}$.

Bew.: Wir formulieren dieses Zählproblem als Siebproblem wie folgt:
Sei $\mathcal{A} = \{n \le x\}$, $\mathcal{P} = \mathbb{P} \setminus \{2\}$, $z = z(x)$ reell, ein später gewählter Parameter.
Für $p < z$ unterscheiden wir die Restklassen 0 und -2 mod p, d.h. $\omega(p) = 2$.
$(p > 2)$
Dann ist $\mathcal{A}_p = \{n \le x;\ n \equiv 0 \bmod p$ oder $n \equiv -2 \bmod p\}$,

Weiter ist $\#\mathcal{A}_d = \frac{2^{\nu(d)}}{d} x + R_d$ mit $|R_d| = O(2^{\nu(d)})$, so daß Vor. 1) gilt mit $\omega(d) = 2^{\nu(d)}$.

Sei $d \mid P(z)$, etwa $d = p_1 \cdots p_r$. Haben $\mathcal{A}_d = \mathcal{A}_{p_1} \cap \dots \cap \mathcal{A}_{p_r}$, für jedes $n \le x$ in $\mathcal{A}_d$ ist also $n \equiv 0\,(p_i)$ oder $n \equiv -2\,(p_i)$ für alle $i \le r$. $\overset{CRS}{\leadsto}$ n liegt in einer von 2^r vielen Restklassen mod d, die durch chinesisches Zusammensetzen der Reste mod p_i entstehen.
(beiden möglichen)
$\Rightarrow \#\mathcal{A}_d = 2^r \cdot \frac{x}{d} + O(2^r) = \frac{\omega(d)}{d} + O(\omega(d))$ ✓

Weiter gilt Vor. 2) mit $\kappa := 2$ wegen $\sum_{p<z} \frac{\log p}{p} \overset{!}{\le} \log z + O(1)$ [s. später]

Vor. 3) gilt mit $y := x$, denn: ein $n \in \mathcal{A}_d$ erfüllt $n \equiv x_i\ (d)$ für einen der $2^{\nu(d)}$ vielen Reste mod d, wo $0 \le x_i < d$. Dann: $d \mid n - x_i \le n \le x$.
Für $d > x =: y$ ist dies nicht möglich, also $\mathcal{A}_d = \emptyset$.

Gesucht ist die Anzahl der PZ-Zwillinge $\le x$, welche $\le \pi(z) + S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)$ ist.
Abschätzen von $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)$ löst also dieses Problem.

Anwendung des Siebsatzes liefert nun:
$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = x\, W(z) + O\left(x (\log z)^3 \exp\left(-\frac{\log x}{\log z}\right)\right), \quad W(z) = \prod_{2<p<z}\left(1 - \frac{2}{p}\right).$$
Dabei ist $W(z) \le \exp\left(-\sum_{p<z} \frac{2}{p}\right) \ll (\log z)^{-2}$.
Die Wahl $\log z = \frac{\log x}{A \log\log x}$ mit einem großen $A > 1$ zeigt: $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) \ll x \left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)^2$,
mit $\pi(z) \le z$ folgt die Beh. □

Damit gibt es wesentlich weniger Zwillinge als Primzahlen:
Aus $\sum_{p<z} \frac{1}{p} \ge \log\log z + O(1)$ folgt die Unendlichkeit der Primzahlmenge.
Nicht so für Zwillinge, denn:

Korollar 4.1: Der Satz von Brun: $\sum_{\substack{p \in \mathbb{P},\\ p+2 \in \mathbb{P}}} \frac{1}{p}$ Konvergiert.

Bew.:

Partielle Σ zeigt:

$$\sum_{\substack{p \le x\\ p+2 \in \mathbb{P}}} \frac{1}{p} = \sum_{n \le x} a_n\, g(n) \text{ mit } g(t) := \frac{1}{t},\ a_n := \begin{cases} 1, & n \in \mathbb{P} \wedge n+2 \in \mathbb{P}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \underbrace{\Big(\sum_{n \le x} a_n\Big)\frac{1}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\int_2^x \Big(\sum_{n \le t} a_n\Big)\frac{dt}{t^2}}_{\ll \int_2^\infty \frac{(\log\log t)^2}{t \log^2 t}\, dt, \text{ was Konvergiert}}$$

Satz 4.1: $\rightsquigarrow$ $\sum_{n \le x} a_n \ll x\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)^2$, $\sum_{n \le t} a_n \ll t\left(\frac{\log\log t}{\log t}\right)^2$

$\square$

1. **Bem.:** "Allgemeinwissen" zu Konvergenz/Divergenz-Untersuchungen solcher Integrale: Cauchy-Verdichtungskriterium für Reihen verwenden!

- $\int_2^x \frac{dt}{t \log t}$ divergiert, da $\sum_{n \le x} \frac{1}{n \log n}$ div., weil $\sum_{n \le x} \frac{2^n}{2^n \cdot n}$ divergiert
- $\int_2^x \frac{dt}{t \log^2 t}$ Konvergiert, da $\sum_{n \le x} \frac{1}{n \log^2 n}$ kgt., weil $\sum_{n \le x} \frac{2^n}{2^n \cdot n^2}$ Konvergiert

Ebenso folgt: $\int_2^x \frac{dt}{t \log t \log\log t}$ divergiert, $\int_2^x \frac{dt}{t \log t (\log\log t)^2}$ Konvergiert usw.

[Cauchy-Verdichtungskriterium: $\sum_{n \le x} a_n$ kgt. $\Leftrightarrow$ $\sum_{n \le x} 2^n \cdot a_{2^n}$ kgt.]

2. **Bem.:** Für die Zwillingszählfunktion können mit schärferen Siebsätzen bessere obere Schranken bewiesen werden. Diese hier reicht aus, um den Satz von Brun zu beweisen, dafür ist das Brunsche Sieb, das wir im nächsten § studieren, nicht nötig. Dafür können aber auch andere Zählfunktionen mit dem Brunschen Sieb abgeschätzt werden.

3. **Bem.:** Nachtrag von $\sum_{p \le n} \frac{\log p}{p} \overset{!}{\le} \log n + O(1)$: Hatten $\sum_{p \le n} \left[\frac{n}{p}\right] \log p = n \log n + O(n)$, $\Rightarrow \pi(x) \ll \frac{x}{\log x}$ mit part. Σ

damit ist $\sum_{p \le n} \frac{n}{p} \log p = n \log n + O(n) + O(\theta(n))$ mit $\theta(n) := \sum_{p \le n} \log p$. Beh.: $\theta(n) \overset{!}{\ll} n$,

Bew: $\theta(2n) - \theta(n) = \sum_{n < p \le 2n} \log p \le \sum_{p \le 2n} \underbrace{\left(\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right]\right)}_{\text{ist } \ge 0 \text{ und } = 1 \text{ für } n < p \le 2n} \log p = 2n \log(2n) - 2n \log n + O(n) \ll n$,

also $\theta(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\theta\left(\frac{x}{2^{i-1}}\right) - \theta\left(\frac{x}{2^i}\right)\right) \ll \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x}{2^i} \ll x$ ✓

$\square$