Noch zu zahlentheoretischen Funktionen:

(1) Es gilt: $2^{\nu(n)} \le d(n) \le 2^{\Omega(n)}$, $\liminf\limits_{n\to\infty} d(n) = 2$

$\forall c>0: d(n) = o(n^c)$, d.h. $\frac{d(n)}{n^c} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\forall c>0\ \exists (n_i)_{i\in\mathbb{N}}: \frac{d(n_i)}{(\log n_i)^c} \xrightarrow{i\to\infty} \infty$

$\nu(n) \le \log_2 n$,

sogar $\nu(n) \ll \frac{\log n}{\log\log n}$ $\qquad n < \sigma(n) \ll n \log n$

$\frac{n}{\log\log n} \ll \varphi(n) \le n$

$\Rightarrow$ zahlentheoretische Fktn. können stark schwanken!

(2) Mittelwerte von zahlentheoretischen Funktionen:

$$\sum_{n\le N} \nu(n) = N\log\log N + CN + o(N) \quad \text{für ein } C>0$$

$$\sum_{n\le N} \Omega(n) = N\log\log N + \tilde{C}N + o(N), \quad \tilde{C} = C + \sum_p \frac{1}{p(p-1)}$$

$$\sum_{n\le N} d(n) = N\log N + (2\gamma-1)N + O(\sqrt{N}), \quad \gamma = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N\right)$$

Euler-Konstante

$$\sum_{n\le N} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12}N^2 + O(N\log N)$$

$$\sum_{n\le N} \frac{\mu^2(n)}{n} = \frac{\log N}{\zeta(2)} + \underbrace{\frac{\gamma}{\zeta(2)} - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)^2}}_{=:B} + \underbrace{O\left(\frac{\log N}{\sqrt{N}}\right)}_{=o(1)}, \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n\le N} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}N^2 + O(N\log N)$$

$$\sum_{n\le N} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log N + O(1)$$

$A(t) := \sum_{n\le t} a_n$, g stetig diff'bar

Bem.: Partielle Summation: $\sum_{n\le N} a_n g(n) = A(N)g(N) - \int_1^N A(t)g'(t)\,dt$

Damit kann z.B. aus der Formel für $\sum_{n\le x} \frac{\mu^2(n)}{n}$ eine für $\sum_{n\le x} \mu^2(n)$ hergeleitet werden:

$g(t) := t \leadsto$

$$\sum_{n\le N} \mu^2(n) = \sum_{n\le N} \frac{\mu^2(n)}{n}\cdot g(n) = \sum_{n\le N} \frac{\mu^2(n)}{n}\cdot N - \int_1^N \sum_{n\le t} \frac{\mu^2(n)}{n}\cdot 1\,dt$$

$$= N\cdot\frac{\log N}{\zeta(2)} + B\cdot N - \int_1^N\left(\frac{\log t}{\zeta(2)} + B + o(1)\right)dt$$

$$= \frac{1}{\zeta(2)}N\log N + \underbrace{BN} - \underbrace{\frac{1}{\zeta(2)}}(N\log N - N) + \underline{BN} + o(N) = \underline{\frac{N}{\zeta(2)} + o(N)}$$

(II) Elementare Siebe

§3: Das Sieb von Eratosthenes-Legendre

Sei $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$ endlich.

Sei $P(z) := \prod_{\substack{p<z \\ p\in\mathcal{P}}} p$, weiter sei $\mathcal{A}_d := \{n \in \mathbb{N};\ nd \in \mathcal{A}\}$,

d.h. $\#\mathcal{A}_d$ ist die Anzahl der Vielfachen von d in $\mathcal{A}$

Dann ist

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) := \sum_{\substack{n\in\mathcal{A} \\ (n, P(z))=1}} 1 \underset{\mu * \mathbb{1} = \varepsilon}{=} \sum_{\substack{n\in\mathcal{A} \\ d \mid (n, P(z))}} \mu(d) = \sum_{d\mid P(z)} \mu(d)\, \#\mathcal{A}_d$$

Wir nehmen im folgenden an, daß wir $\#\mathcal{A}_d$ recht gut kennen – im Bsp. $\mathcal{A} = \{n \leq x\}$, $\mathcal{P} = \mathbb{P}$, zählt man die Vielfachen von d, die $\leq x$ sind, das sind $\lfloor \frac{x}{d} \rfloor = \frac{x}{d} + O(1)$ viele. Eine derartige Formel sei bekannt:

<u>Hauptannahme:</u> $\boxed{\#\mathcal{A}_d = \frac{\omega(d)}{d} \cdot X + R_d}$,

wo $\omega(d)$ eine multiplikative Fkt. mit $\omega(d) \geq 0$ für $d \in \mathbb{N}$, und $\omega(p) = 0$ für $p \in \mathbb{P} \setminus \mathcal{P}$. (Streichen nur Vielfache von d, die aus p's $\in \mathcal{P}$ zusammengesetzt)

Die Formel kann als Definition für den Restterm R_d gelesen werden. Wir erwarten, daß R_d für die meisten Siebe einen kleinen Fehlerbeitrag liefert.

Es folgt:

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = X \underbrace{\sum_{d\mid P(z)} \mu(d) \cdot \frac{\omega(d)}{d}} + \sum_{d \mid P(z)} \mu(d) \cdot R(d),$$

$$= \prod_{\substack{p<z \\ p\in\mathcal{P}}} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) =: W(z, \omega)$$

$\boxed{f \text{ mult.} \Rightarrow \sum_{d\mid P(z)} f(d)\mu(d) = \prod_{\substack{p<z \\ p\in\mathcal{P}}} (1 - f(p)), \text{ denn r.S. ausmultiplizieren gibt linke Seite}}$

Dies ergibt bereits eine erste Version eines Sieb-Satzes:

Sieb des Eratosthenes-Legendre (Einfache Version):

$$\boxed{\left|S(\mathcal{A},\mathcal{P};z) - X\cdot W(z,\omega)\right| \le \sum_{d\mid P(z)} |R_d|}$$

Damit können wir etwas anfangen, wenn $W(z,\omega)$ besser bekannt ist.

Untersuchen wir jetzt das Primzahl-Sieb damit:

$\mathcal{A}_d = \{m\in\mathbb{N};\ dm\le x\}$, $\#\mathcal{A}_d = \lfloor \frac{x}{d}\rfloor = \frac{x}{d} + R_d$, $\mathcal{P}=\mathbb{P}$,

so daß $X=x$, $\omega(d)=1$, $|R(d)|\le 1$. $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$

Es folgt:

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) = x\cdot\sum_{d\mid P(z)}\frac{\mu(d)}{d} + O\Big(\sum_{d\mid P(z)} 1\Big)$$

Wir wollen versuchen, damit eine Abschätzung für $\pi(x)$ herzuleiten. Dazu muß der Fehlerterm gut abgeschätzt werden.

Erste Abschätzung: Haben $\sum_{d\mid P(z)} 1 = 2^{\pi(z)} \le 2^z$.

Mit $\pi(x) = (\pi(x)-\pi(z)) + \pi(z) \le S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) + z$

und $z := c\log x$ erhalten wir

$$2^z = 2^{c\log x} = e^{\frac{c\log x}{\log 2}} = x^{\frac{c}{\log 2}} = x^{1-\varepsilon} \quad \text{für } \frac{c}{\log 2}<1,\ \varepsilon>0.$$

Weiter ist

$$\prod_{p<z}\Big(1-\frac{1}{p}\Big) \underset{\boxed{1-x\le e^{-x}}\ \checkmark}{\le} \exp\Big(-\sum_{p<z}\frac{1}{p}\Big) \underset{\circledast\ \boxed{\sum_{p<z}\frac{1}{p}\ge \log\log z + O(1)}}{\ll} \exp(-\log\log z) = \frac{1}{\log z} \ll \frac{1}{\log\log x}.$$

Da $x^{1-\varepsilon} \ll \frac{x}{\log\log x}$, folgt:

$$\pi(x) \le S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) + z \ll \underline{\underline{\frac{x}{\log\log x}}}.$$

Dies ist schwach! Man weiß, daß $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ (Primzahlsatz, beweisbar mit analytischen Methoden)

<u>Beweis von Beh. $\circledast$:</u> $\sum_{p<z} \frac{1}{p} \overset{!}{\geq} \log\log z + O(1)$

<u>1. Schritt:</u> Es genügt zu zeigen: $\sum_{p\leq n} \frac{\log p}{p} \overset{!}{\geq} \log n + O(1)$.

Denn partielle Summation mit $g(t) := \frac{1}{\log t}$ zeigt: $\quad (g'(t) = -\frac{1}{t\log^2 t})$

$$\sum_{p\leq n} \frac{1}{p} = \sum_{p\leq n} \frac{\log p}{p} \cdot g(p) = \underbrace{\Big(\sum_{p\leq n} \frac{\log p}{p}\Big)}_{\geq \log n + O(1)} \cdot \frac{1}{\log n} + \int_1^n \underbrace{\Big(\sum_{p\leq t} \frac{\log t}{t}\Big)}_{\geq \log t + O(1)} \cdot \frac{dt}{t\log^2 t}$$

$$\geq \int_1^n \frac{dt}{t\log t} + O(1) \geq \log\log n + O(1). \quad \checkmark$$

<u>2. Schritt:</u> Beweisidee: Vergleich zweier Formeln für $\log n!$ wie folgt:

Schreibe $n! = \prod_{p\leq n} p^{e_p}$, dann ist $e_p = \underbrace{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}_{\#\text{Vielf. von } p} + \underbrace{\lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor}_{\#\text{Vielf. von } p^2} + \ldots$

$\Rightarrow \log n! = \sum_{p\leq n} \left(\lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \ldots\right) \log p$, aber auch $\log n! = \sum_{k\leq n} \log k = \underbrace{n\log n - n + O(\log n)}_{= \int_1^n \log t\, dt + O(1)}$,

und es ist $\quad \sum_{p\leq n} \left(\lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^3} \rfloor + \ldots\right) \log p \leq n \sum_p \frac{\log p}{p(p-1)} \ll n$.

Somit folgt: $\quad \sum_{p\leq n} \lfloor \frac{n}{p} \rfloor \log p = n\log n + O(n)$,

also $\quad \sum_{p\leq n} \frac{\log p}{p} \geq \log n + O(1)$. $\quad \square$

<u>Bemerkung:</u>

- Man kann auch die obere Schranke $\sum_{p\leq n} \frac{\log p}{p} \leq \log n + O(1)$ beweisen, d.h. es gilt Gleichheit. Dafür wird aber $\sum_{p\leq n} \log p \ll n$ benötigt, was gerade aus der Tschebytschev-Schranke $\pi(x) \ll \frac{x}{\log x}$ folgt. Hier haben wir – um eine $\pi(x)$-Schranke herzuleiten – nur solche Abschätzungen benutzt, die ohne einer $\pi(x)$-Schranke auskommen.
- Mit $\sum_{p\leq z} \frac{\log p}{p} = \log z + O(1)$ folgt auch $\sum_{p\leq z} \frac{1}{p} = \log\log z + O(1)$, auch wieder mit partieller Summation.

Im folgenden § werden wir das Sieb des Eratosthenes-Legendre verallgemeinern und verschärfen.