

Seminar elementare Primzahltheorie und Teilerstatistik * Themenliste *

K. Halupczok

Math. Institut, WWU Münster, Sommersemester 2014

Mi. 14:00 Uhr ct bis 16:00 Uhr, Raum: SR 1A, erste Sitzung am 9. April 2014

Vorbesprechung und Themenvergabe: Fr. 7.2.2013, 11:00 Uhr st,
Treffpunkt Raum 113 (zwischen SR 1C und SR 1D)

Inhaltsverzeichnis

1	Zahlentheoretische Funktionen	2
2	Elementare Primzahltheorie	3
3	Der Satz von Hensley und Richards, Teil 1	3
4	Der Satz von Hensley und Richards, Teil 2	3
5	Teilerstatistik	4
6	Glatte Zahlen	4
7	Stark zusammengesetzte Zahlen	5
8	Ein Satz von Hurwitz zur Approximation irrationaler Zahlen durch rationale	5

Inhalte

Im ersten Teil des Seminars behandeln wir zahlentheoretische Funktionen und Themen der elementaren Primzahltheorie, insbesondere den Satz von Tschebyshev. Dies führt uns auf zwei Vermutungen von Hardy und Littlewood, deren Inkompatibilität wir beweisen werden (auch bekannt als Satz von Hensley und Richards). Im zweiten Teil behandeln wir Fragen der Teilerstatistik, etwa die Frage, wie viele Teiler, Primteiler und Primfaktoren eine natürliche Zahl im Mittel hat, sowie die Häufigkeit glatter Zahlen, die nur aus kleinen Primfaktoren zusammengesetzt sind bzw. stark zusammengesetzt sind. Vorausgesetzt werden Grundkenntnisse der elementaren Zahlentheorie (Rechnen mit Kongruenzen, Chinesischer Restsatz, Primzahlen und der Hauptsatz der Arithmetik, d. h. der Satz von der eindeutigen Primfaktorzerlegung in \mathbb{Z}).

Allgemeine Bemerkungen

Das Seminar knüpft an das letzte Kapitel über zahlentheoretische Funktionen im Skript [5] von Herrn Lorenz an, vgl. auch mein altes Skript [2], ab Kapitel 5. Auch die Grundzüge der elementaren Primzahltheorie werden vorgestellt bzw. wiederholt. Der weitere Stoff verwendet dann immer wieder diese Ergebnisse und zeigt Anwendungen auf. Die Stichpunktliste hier gibt an, welche Themen im Seminarvortrag mindestens vorgestellt werden sollen.

Themenliste

1 Zahlentheoretische Funktionen

09.04.2014

Literatur: Auswahl der Skripte [5] und [2], s. auch [1] und [4]

Kurze Einführung in die Theorie der zahlentheoretischen Funktionen

- Multiplikative und additive zahlentheoretische Funktionen
- Die Möbiusfunktion und die Möbiusschen Umkehrformeln

- Faltungsidetitäten
- Landau-Symbolik
- Anwendung: Anzahl sichtbarer Gitterpunkte

2 Elementare Primzahltheorie

16.04.2014

Literatur: Auswahl von Kapitel 3.4 aus [1], s. auch [4], [5] und [2]

Kurze Einführung in die Theorie der Primzahlzählfunktion

- Primzahlen und die Primzahlzählfunktion π
- Der Satz von Tschebyschev mit Beweis
- Bertrands Postulat und Abschätzung der n -ten Primzahl
- Die Ergebnisse von Rosser und Schoenfeld
- Zum Satz von Mertens
- Zum Primzahlsatz und die Riemannsche Vermutung

3 Der Satz von Hensley und Richards, Teil 1

23.04.2014

Literatur: Originalarbeit [3] und eigene Notizen

Zwei bekannte Vermutungen von Hardy und Littlewood sind inkompatibel

- Zwei Vermutungen von Hardy-Littlewood über Primzahlmuster und Primzahlen in Intervallen
- Umriss der Beweisidee mittels zahlentheoretischen Hilfsfunktionen, Reduktion auf ein konstruktives Problem

4 Der Satz von Hensley und Richards, Teil 2

30.04.2014

Literatur: Originalarbeit [3] und eigene Notizen

Konstruktion einer zulässigen Menge in einem kurzen Intervall, die hinreichend viele Elemente hat

- vorbereitende Lemmata: Abschätzungen der Hilfsfunktionen (mit Chinesischem Restsatz, Sieb des Eratosthenes, Satz von Mertens und dem Primzahlsatz)
- Schluss des Beweises
- Ergänzende historische Hinweise

5 Teilerstatistik

07.05.2014

Literatur: Auswahl von Kapitel 5 aus [2], s. auch [1] und [4]

Bestimmung der Mittelwerte prominenter zahlentheoretischer Funktionen

- Die Teileranzahlfunktion τ , die Dirichletsche Hyperbelmethode
- Die Primteileranzahlfunktion ω und die Primfaktorenanzahlfunktion Ω
- Mittelwerte und Abweichungen vom Mittelwert: Ergebnisse von Hardy und Ramanujan

6 Glatte Zahlen

14.05.2014

Literatur: Auswahl von Kapitel 9 aus [4]

Glatte Zahlen und die Dickman-de Bruijn-Funktion

- Der kleinste und größte Primfaktor einer natürlichen Zahl
- Glatte Zahlen und ihre Häufigkeit
- Die Dickman-de Bruijn-Funktion
- Beispiele für Anwendungen

7 Stark zusammengesetzte Zahlen

21.05.2014

Literatur: Auswahl von Kapitel 16 aus [4]

Der Kompositionsindex als Maß für stark zusammengesetzte Zahlen

- Der Kompositionsindex λ einer natürlichen Zahl
- stark zusammengesetzte Zahlen
- Der Mittelwert von λ und $1/\lambda$

8 Ein Satz von Hurwitz zur Approximation irrationaler Zahlen durch rationale

28.05.2014

Literatur: S. 25–30 Mitte aus [6]

- Die Folge der Fareybrüche
- Der Mediant und Ford-Kreise
- Der Satz von Hurwitz inklusive Beweis mit Fareybrüchen

Literatur

- [1] Olivier Bordellès: Arithmetic Tales, Universitext Springer Verlag.
- [2] K. Halupczok, Manuskript zur Vorlesung Elementare Zahlentheorie, Sommersemester 2009 (Freiburg), <http://wwwmath.uni-muenster.de/u/karin.halupczok/ElZthSS2009Skript.pdf>
- [3] Douglas Hensley and Ian Richards: Primes in intervals. Acta Arith. 25 (1973/74), 375–391.
- [4] Jean-Marie de Koninck and Florian Luca: Analytic Number Theory—Exploring the Anatomy of Integers, Graduate Studies in Mathematics Vol. 134, AMS.
- [5] F. Lorenz, Manuskript zur Vorlesung Elementare Zahlentheorie, Sommersemester 2012 (Münster), s. <http://wwwmath.uni-muenster.de/u/karin.halupczok/elZTSoSe13.html>
- [6] J. Steuding, Diophantine Analysis, Chapman & Hall/CRC.