Die Selberg-Klasse

(2-std. Spezialvorlesung im SoSe 2013)

§8. Das Langlands-Programm

Im Langlands-Programm werden weitreichende Vermutungen formuliert, die anscheinend unverwandte Objekte der ZT, algebraischen Geometrie und der Theorie der automorphen Formen miteinander verbindet.
Diese Verbindung geht über Langlands-L-Fktn., die automorphen Darstellungen zugeordnet werden, und über Relationen zwischen den analytischen Eigenschaften und tieferliegenden algebraischen Strukturen.
Es gibt 2 Sorten von L-Funktionen:

- motivische L-Funktionen, die die Artinschen L-Fktn. verallgemeinern und rein arithmetisch definiert sind
- automorphe L-Funktionen

In ihrer verständlichen Form heißt die Identität zwischen motivischen und automorphen L-Fktn. ein Reziprozitätsgesetz.
Langlands' Reziprozitätsgesetz besagt, daß jede L-Fkt., motivisch oder automorph, gleich einem Produkt von L-Fktn. zu den automorphen Darst. ist.

Zu automorphen Darstellungen:
Wir können hier nicht automorphe Darstellungen π und ihre L-Fktn. $L(s,\pi)$ definieren, sondern behandeln nur den Spezialfall eines ZKs wie folgt.

Sei K ein ZK. Für jeden Absolutbetrag v auf K gibt es eine Vervollständigung K_v auf K, die $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist, oder ein $\mathfrak{p}$-adischer Körper, wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal von K ist. Sei $\mathcal{O}_v$ der Ganzheitsring in K_v.
Im Zusammenhang mit Lokal-Global-Problemen muß man oft mehrere Stellen v gleichzeitig behandeln.

Zunächst erscheint es natürlich, das Produkt aller K_v zu bilden,
was einen topologischen Ring ergibt, allerdings ohne brauchbare Kompaktheitseigensch.
Da jedes $\alpha \in K$ eine p-adische ganze Zahl für fast alle p ist,
schränken wir auf Elemente $\alpha = \prod_v \alpha_v$ ein,
wobei α_v für fast alle außer endl. vielen Stellen v in $\mathcal{O}_v$ liegt.
Solche Elemente heißen Adèle.

Die Adèle bilden ein mengentheoretisches Produkt, nämlich
einen topologischen Ring, den Adèlring A_K von K.
K ist in A_K durch $\alpha \mapsto (\alpha, \alpha, \dots)$ eingebettet.

Sei $m \geq 1$ und $GL_m(A_K)$ die Gruppe der $m \times m$-Matrizen über A_K,
dessen Determinante eine Einheit in A_K ist.
Mit der Produkttopologie auf A_K wird $GL_m(A_K)$ zu einer lokal kompakten
Gruppe, in der $GL_m(K)$, diagonal eingebettet, eine diskrete UG von $GL_m(A_K)$ ist.
Ein Charakter Ψ von $K^* \setminus GL_1(A_K)$ heißt Größencharakter, $K^* := K \setminus \{0\}$.
Für Ψ fest betr. den Hilbertraum $L^2 := L^2(GL_m(K) \setminus GL_m(A_K), \Psi)$
meßbarer Funktionen f auf $GL_m(K) \setminus GL_m(A_K)$ mit

- $f(zg) = \Psi(z) f(g)$ für alle $z \in Z$, $g \in GL_m(K) \setminus GL_m(A_K)$,
- beschränktem Integral $\int_{Z GL_m(K) \setminus GL_m(A_K)} |f(g)|^2 dg$.

Elemente $f \in L^2$ verallgemeinern das Konzept getwisteter Modulformen
auf diskrete UG der vollen Modulgruppe.
Um einen Unterraum von Spitzenformen einzuführen, betr. wir geeignete UG.
Jede parabolische UG P von $GL_m(R)$, wo R komm. Ring mit 1,
hat eine Levi-Zerlegung $P = MN$ mit einem unipotenten Radikal N von P,
M heißt Levi-Komponente von P. Sei N notiert mit $N_P(R)$.

Die UG von Spitzenformen $L_0^2 := L^2(GL_m(K) \backslash GL_m(A_K), \Psi)$ von L^2 wird definiert durch die zusätzliche Verschwindungsbed.:

- $\forall$ parabol. UG $P \leq GL_m(A_K)$ $\forall g \in GL_m(A_K)$:
$$\int_{N_P(K) \backslash N_P(A_K)} f(ng)\, dn = 0.$$

Die rechtsreguläre Darst. R von $GL_m(K)$ auf L^2 wird geg. durch
$$(R(g)f)(\alpha) = f(\alpha g) \quad \forall f \in L^2 \quad \forall \alpha, g \in GL_m(A_K).$$

Jede automorphe Darst. ist ein Unterquotient der rechtsregulären Darst. von $GL_m(A_K)$ auf L^2, und eine kuspidale automorphe Darst. ist eine Unterdarst. der rechtsregulären Darst. von $GL_m(A_K)$ auf L_0^2.

Eine Darst. von $GL_m(A_K)$ heißt zulässig, wenn ihre Einschränkung auf die maximale UG
$$K := \prod_{v \text{ komplex}} U_m(\mathbb{C}) \times \prod_{v \text{ reell}} O_m(\mathbb{R}) \times \prod_{v \text{ endl.}} GL_m(\mathcal{O}_v)$$
jede irred. Darst. von K mit endl. Vielfachheit enthält.
Hier sind U_m und O_m die Gruppen der unitären und orthogonalen $m \times m$-Matrizen.
Eine Darst. π einer Gruppe G heißt irreduzibel, wenn sie nicht in die direkte Summe zweier Darst. zerlegt werden kann.
Ein irreduzibler Charakter ist einer, der zu einer irred. Darst. gehört.
Sei nun π irreduzibele, zulässige, kuspidale automorphe Darst. von $GL_m(K)$.
Dann kann π in ein Produkt $\pi = \bigotimes_v \pi_v$ faktorisiert werden, wobei v alle (endl. und unendl.) Stellen von K durchläuft, und jedes π_v ist eine irred. Darst. von $GL_m(K_v)$.
Bis auf endl. viele Stellen v ist π_v unverzweigt.

Allgemeine L-Funktionen

Um zu einer automorphen Darst. π die zugeh. L-Fkt. zu def.,
def. wir die lokalen Eulerfaktoren für nichtarchimedische (endl.)
unverzweigte Stellen v durch $L_v(s,\pi) := \det\left(1 - \frac{A_v}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1}$,
wo A_v die halbeinfache Konjugationskl. zu π_v ist,
und $\mathfrak{p}$ das Primideal von K zur Stelle v ist.
(Für verzweigte Stellen v ist die Def. von L_v sehr technisch.)
Jeder Eulerfaktor $L_v(s,\pi)$ einer nichtarchimedischen Stelle v zu $\mathfrak{p}$
kann als $L_v(s,\pi) = \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{\alpha_j(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1}$ geschrieben werden,

wobei die $\alpha_j(\mathfrak{p})$, $1 \le j \le m$, die Satake- bzw. Langlandsparameter heißen.
Diese sind durch die lokalen Darst. π_v bestimmt.

Bei den archimedischen (unendl.) Stellen v setzen wir
$$L_v(s,\pi) = \prod_{j=1}^{m} \Gamma_v(s - \alpha_j(v)) \quad \text{für bestimmte Zahlen } \alpha_j(v) \text{ (best. durch } \pi_v\text{)},$$
wobei $\quad \Gamma_v(s) := \begin{cases} \pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2), & K_v \cong \mathbb{R}, \\ (2\pi)^{-s}\,\Gamma(s), & K_v \cong \mathbb{C}. \end{cases}$

Die zu π globale L-Fkt. ist geg. durch $L(s,\pi) := \prod_{v \text{ nicht-archimedisch}} L_v(s,\pi)$,

und die vervollst. L-Fkt. ist def. durch
$$\Lambda(s,\pi) := L(s,\pi) \prod_{v \text{ arch.}} L_v(s,\pi).$$
Es gilt:

Satz 11.1: Sei K ein ZK, π eine irred. zul. kuspidale autom. Darst.
von $GL_m(\mathbb{A}_K)$. Dann hat $\Lambda(s,\pi)$ eine merom. Darst. auf ganz $\mathbb{C}$
und genügt der Funktionalglg. $\Lambda(s,\pi) = \varepsilon_\pi N_\pi^{s-1/2} \Lambda(1-s,\tilde{\pi})$,
wobei $\tilde{\pi}$ die Kontragrediente Darst. von π ist,
$N_\pi \in \mathbb{N}$ die Führungszahl von π und
ε_π die Wurzelzahl (alles vollst. bestimmt durch die lokalen Darst.).
$\Lambda(s,\pi)$ ist ganz außer falls $m=1$ und π trivial; dann hat $\Lambda(s,\pi)$ einen Pol bei $s=1$.

Für $m=1$ erhält man einfach ζ, L-Fktn. und Hecke L-Fktn. zu Größencharakteren. Für $m=2$ erhält man L-Fktn. zu Neuformen.
Die Ähnlichkeiten dieser allg. L-Fktn.
mit denen der Selberg-Klasse $\mathcal{S}$ sind offensichtlich.
Einerseits wird $\mathcal{S}$ durch Axiome definiert, die
für die meisten L-Fktn. der ZT zutreffen,
andererseits haben wir die Langlandskonstruktion
allgemeiner L-Fktn. mithilfe von Gruppendarstellungen durchgeführt.

Die Langlands-Vermutungen

In den 1960iger Jahren begann Langlands das nach ihm benannte Programm, welches als Fortführung der Artin-Vermutung verstanden werden kann.
Eine der zentralen Vermutungen besagt, daß alle Zeta-Fktn. der ZT spezielle Realisierungen von L-Fktn. zu automorphen Darst. π sind.

Langlands' Reziprozitätsvermutung: Sei K ZK, $L|K$ endl. galois, $G=Gal(L|K)$, $\rho: G\to V$ eine irred. Darst. von G mit einem m-dim. UR V. Dann gibt es eine automorphe kuspidale Darst. π von $GL_m(A_K)$, so daß $L(s,\rho,L|K)=L(s,\pi)$.

Dies bedeutet, daß es Identitäten zwischen L-Fktn. geben sollte,
die grundsätzlich von verschiedenem Typ sind!
Da Hecke-Größencharaktere autom. Darst. von $GL_1(A)$ sind,
ist die Artin-Vermutung Spezialfall der Langlands-Reziprozitätsvermutung.
Nach Artin ist für $m=1$ und $L|K$ abelsch diese Vermutung eine der Klassenkörpertheorie.
Im Fall von Funktionenkörpern wurde diese Langlands-Vermutung von Drinfeld in Dimension 2 bewiesen, und neulich von Lafforgue für allg. Dimensionen (beide erhielten dafür die Fields-Medaille).

Nun betr. wir die lokalen Eulerfaktoren von L-Fktn. zu autom. Darst.
Petersson erweiterte die Ramanujan-Vermutung auf Werte der τ-Fkt. von Modulformen.
Man erwartet ein Analog für alle arithmetischen L-Funktionen:

Ramanujan-Petersson-Vermutung: Sei π eine kuspidale autom. Darst. von $GL_m(\mathbb{A}_K)$, die unverzweigt bei v ist.

- Ist v nichtarchimedisch, dann ist $|\alpha_j(\mathfrak{p})| = 1$ für alle $1 \leq j \leq m$, wobei $\mathfrak{p}$ das Primideal zur Stelle v ist.
- Ist v archimedisch, dann ist $\operatorname{Re} \alpha_j(v) = 0$ für alle $1 \leq j \leq m$.

Diese Vermutung ist das lokale Analog zur GRH.

Weitere Spekulationen zu $\mathcal{S}$:
Es wird erwartet, daß alle Fktn. in $\mathcal{S}$ autom. L-Fktn. sind.
Ist $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ primitiv und automorph, gehört diese auch zu einer irreduziblen autom. Darst.
Umgekehrt sollte jede irred. autom. Darst. eine primitive Fkt. in $\mathcal{S}$ geben.
Dies wurde für GL_1 und GL_2 gezeigt.
Die Axiome zur analytischen Fortsetzung und Funktionalglg. folgen dann aus Satz 11.1 und der Ramanujan-Petersson-Vermutung.
Letztlich ist der lokale Eulerfaktor an unendl. Stellen von der Form, die von der starken λ-Vermutung vorhergesagt wird.
Murty zeigte:

Satz 12.1: Sei die Selberg-Vermutung (B) wahr.
(i) Ist π eine irred. kuspidale autom. Darst. von $GL_m(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, welche die Ramanujan-Petersson-Vermutung erfüllt, dann ist $L(s,\pi)$ eine primitive Fkt. in $\mathcal{S}$.
(ii) Ist K eine Galoiserw. von $\mathbb{Q}$ mit auflösbarer Galoisgruppe G, und χ ein irred. Ch. von G, $\deg \chi = m$, dann ex. irred. kuspidale autom. Darst. π von $GL_m(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ mit $L(s,\chi) = L(s,\pi)$.

Beh. (i) identifiziert bestimmte L-Fktn. mit autom. Darst. als primitive Fktn. in der Selberg-Klasse unter Ann. der Selberg-Vermutung (B) und der Ramanujan-Petersson-Vermutung.

Beh. (ii) ist Langlands' Reziprozitätsvermutung für auflösbare $K|\mathbb{Q}$.

Der Beweis zeigt: Ist die Dedekind Zeta-Fktn. von K gleich der L-Fkt. einer autom. Darst. $|\mathbb{Q}$, dann impliziert Selbergs Vermutung (B) die Langland-Reziprozitätsvermutung.