# Die Selberg-Klasse

(2-std. Spezialvorlesung im SoSe 2013)

## §7: Bestimmte Verallgemeinerungen von Dirichlet-L-Funktionen in $\mathcal{S}$

1.) Dedekindsche Zetafunktionen:

Für einen ZK (Zahlkörper) $K$ (= endl. alg. Erw. von $\mathbb{Q}$) mit Zahlring $A := K \cap \mathbb{A}$, $\mathbb{A}$ die Menge der ganzalgebraischen Zahlen über $\mathbb{Q}$, def. man $\zeta_K(s) := \sum_{\mathfrak{a}} N(\mathfrak{a})^{-s}$,
wobei $\mathfrak{a}$ die (ganzen) Ideale in $A$ durchläuft und $N(\mathfrak{a}) := \#(A/\mathfrak{a})$ deren Absolutnorm ist.
Auf ihrer Kgz.halbebene $\sigma > 1$ hat die Fkt. $\zeta_K$ die Eulerproduktdarstellung $\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$,
wo $\mathfrak{p}$ die Primideale in $A$ durchläuft, denn in $A$ gilt die eindeutige Zerlegung in Primideale, da $A$ ein Dedekindbereich ist.
Die $\zeta_K$ gehören zu $\mathcal{S}$ mit $d_{\zeta_K} = [K:\mathbb{Q}]$.
Sie werden verallgemeinert zu den:

2.) Hecke L-Funktionen: Sei $K$ ein ZK, $\mathfrak{f}$ ein Ideal von $K$ und $\chi$ mod $\mathfrak{f}$ ein Größencharakter (Def. s.u.).
Die zugeordnete Hecke L-Fkt. ist geg. durch

$$L(s,\chi) := \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{eind.} \\ \text{Primidealzerl.}}}{=} \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1},$$

wobei die $\sum$ über alle ganzen Ideale $\mathfrak{a} \neq 0$ in $K$ läuft und $N(\mathfrak{a})$ die Norm des Ideals $\mathfrak{a}$ bezeichnet.

## Größencharaktere

Hecke-Größencharaktere stellen die allgemeinste Erweiterung von Dirichlet-Charakteren auf Zahlkörper dar.
Geg. sei ein Zahlkörper $K$ vom Grad $n$ über $\mathbb{Q}$.
Dann ex. genau $n$ Automorphismen $K^{(j)}$ von $K$ in $\mathbb{C}$, $1 \le j \le n$, die geg. sind durch $K \ni \alpha \mapsto \alpha^{(j)} \in K^{(j)}$, wobei die $\alpha^{(j)}$ die $n$ Konjugierten von $\alpha$ bezeichnen. Wir nehmen an, daß unter ihnen $r_1$ reelle und $2r_2$ komplexe Einbettungen sind (mit $n = r_1 + 2r_2$).
Seien $K^{(1)}, \dots, K^{(r_1)}$ die reellen Einbettungen,
und $K^{(r_1+1)}, \dots, K^{(r_1+r_2)}$, $K^{(r_1+r_2+1)} = \overline{K^{(r_1+1)}}, \dots, K^{(n)} = \overline{K^{(r_1+r_2)}}$.
Sei $\mathfrak{f} \neq 0$ ganzes Ideal von $K$. Die Einheitengruppe $U(\mathfrak{f})$ modulo $\mathfrak{f}$ ist definiert als die Menge aller Einheiten $\varepsilon \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}$, die total positiv sind. Diese ist eine Gruppe.

Nach dem Dirichletschen Einheitensatz ex. $r = r_1 + r_2 - 1$ Einheiten $\eta_1, \dots, \eta_r$ und eine Einheitswurzel $\zeta$ in $K$, so dass alle $\varepsilon \in U(\mathfrak{f})$ eindeutig dargestellt werden können als $\varepsilon = \zeta^m \eta_1^{n_1} \cdots \eta_r^{n_r}$, die $n_k, m \in \mathbb{Z}$.
Die $\eta_1, \dots, \eta_r$ heißen Grundeinheiten bzw. Fundamentaleinheiten von $U(\mathfrak{f})$, sie sind aber nicht eindeutig bestimmt.
Def. die Matrix

$$\left(e_j \log |\eta_k^{(j)}|\right)_{1 \le j,k \le r}, \quad \text{wo die } e_j := \begin{cases} 1, & 1 \le j \le r_1, \\ 2, & r_1 < j \le r_1 + r_2. \end{cases}$$

Der Regulator $R(\mathfrak{f})$ wird definiert als Betrag der Determinante dieser Matrix,

$$R(\mathfrak{f}) := \left| \det \left(e_j \log |\eta_k^{(j)}|\right) \right|,$$

und hängt nicht von der Wahl der Grundeinheiten ab.
Sei $I(\mathfrak{f})$ die mult. Gruppe, die von allen Idealen erzeugt wird, die teilerfremd zu $\mathfrak{f}$ sind. Die Hauptstrahlklasse $P(\mathfrak{f})$ besteht aus allen Hauptidealen der Form $(\alpha/\beta)$ mit:

- $0 \neq \alpha, \beta \in \mathcal{O}_K$ (dem Ganzheitsring), • $\alpha \equiv \beta \bmod \mathfrak{f}$,
- $\alpha/\beta$ ist total positiv, d.h. alle reellen Konjugierten von $\alpha/\beta$ sind $> 0$.

Die Faktorgruppe $G(\mathfrak{f}) := I(\mathfrak{f})/P(\mathfrak{f})$ heißt Strahlklassengruppe mod $\mathfrak{f}$, ihre Elemente heißen Strahlklassen. Diese ist endlich abelsch, ihre Ordnung sei $h(\mathfrak{f})$.

Jetzt können wir Hecke Charaktere definieren.
Geg. seien $a_j \in \mathbb{Z}$ und $v_k \in \mathbb{R}$ mit

- $a_j \in \{0,1\}$ für $1 \le j \le r_1$, $a_j \in \mathbb{Z}$ für $r_1 < j \le r_1 + r_2$,
- $v_k \in \mathbb{R}$ für $1 \le k \le r_1 + r_2$ mit $v_1 + \ldots + v_{r_1+r_2} = 0$.

Dann def. eine Fkt. $\chi_\infty : K^* \to \mathbb{C}^*$ durch

$$\chi_\infty(\alpha) := \prod_{k=1}^{r_1+r_2} |\alpha^{(k)}|^{iv_k} \prod_{j=1}^{r_1+r_2} \left( \frac{\alpha^{(j)}}{|\alpha^{(j)}|} \right)^{a_j}.$$

Da $\sum v_k = 0$, folgt, daß $\chi_\infty$ trivial auf $\mathbb{Q}^*$ ist.
Wir nehmen an, daß der Kern von $\chi_\infty$ die Einheitengruppe mod $\mathfrak{f}$ enthält, d.h. $\chi_\infty(\varepsilon) = 1$ für alle $\varepsilon \in U(\mathfrak{f})$. Dann induziert $\chi_\infty$ einen Charakter auf $P(\mathfrak{f})$.
Ein nichttrivialer Hom. $\chi : I(\mathfrak{f}) \to \mathbb{C}^*$ heißt Größencharakter modulo $\mathfrak{f}$ (resp. Hecke Charakter, resp. verallgemeinerte Dirichlet L-Fkt.) falls $\forall \mathfrak{a} = (\alpha) \in P(\mathfrak{f}) : \chi(\mathfrak{a}) = \chi_\infty(\alpha)$.
Sind alle $a_j, v_k = 0$, dann heißt $\chi$ ein Strahlklassencharakter, und gilt außerdem $\mathfrak{f} = (1)$, dann ist $\chi$ ein Idealklassengruppencharakter, also einer der endl. vielen Charaktere der Klassengruppe von $K$.

Falls es ein Ideal $\mathfrak{f}^* \subseteq \mathfrak{f}$ und einen Größencharakter $\chi^*$ mod $\mathfrak{f}^*$ gibt mit $\chi = \chi^*$ auf $I(\mathfrak{f})$, dann wird $\chi$ von $\chi^*$ induziert, ansonsten heißt $\chi$ primitiv und $\mathfrak{f}$ heißt Führungsideal von $\chi$.

Ist $\chi$ der triviale (Haupt-) Charakter, dann ist die Hecke L-Fkt. zu $K$ die Dedekindsche Zeta-Funktion.

Die Ergebnisse von Hecke ($L$ zu ganzer Fkt. forts'bar für $\chi \neq \chi_0$, Funk.glg. für prim. $\chi$) zeigen, daß Hecke L-Funktionen zu primitiven Größencharakteren bzgl. $K$ alle Elemente der Selberg-Klasse $\mathcal{S}$ vom Grad $n = [K:\mathbb{Q}]$ sind.
Weiter verschwinden die $L(s,\chi)$ nicht auf $\sigma \geq 1$.
Mit einer Taubersatzanwendung kann weiter die Selberg-Vermutung (A) für die Hecke L-Funktionen gezeigt werden.

3.) Artinsche L-Funktionen:

Sei $K$ eine Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$ (allg.: Galoiserw. $L|K$) mit Galoisgruppe $G := Gal(K|\mathbb{Q})$. Dann ist $K$ der Zerfällungskörper eines normierten Polynoms mit rationalen Koeff., und $G$ die Gruppe der Körperautomorphismen von $K$, die $\mathbb{Q}$ punktweise festlassen.
Der Zerfällungstyp von $p$ in $\mathcal{O}_K$ ist vollst. bestimmt durch die Größe der UG von $G$, die jedes $\mathfrak{p}_j$ festläßt.
Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß $p$ in $K$ unverzweigt ist, d.h. die $\mathfrak{p}_j$ sind alle verschieden; dann sind all diese UG zyklisch.
Die Fixgruppe $Fix(\mathfrak{p}_j) \leq G$ ist UG in $G$, welche von einem bestimmten El. erzeugt wird, dem Frobeniusautom. $\sigma_{\mathfrak{p}_j} \in G$.
Die zugehörige Konjugationsklasse der $\sigma_{\mathfrak{p}_j}$ in $G$ sei mit $\sigma_p$ bezeichnet, da diese nur noch von $p$ abhängt.
Artin studierte $m$-dimensionale Darstellungen der Galoisgruppe $G$, d.h. Hom. $\varrho: G = Gal(K|\mathbb{Q}) \longrightarrow GL_m(\mathbb{C})$. [oder $GL_m(V)$, $V$ ein endl.-dim. $\mathbb{C}$-VR]
Die eindim. Darstellungen sind genau die Charaktere.
Die zugeh.
Artin L-Fkt. wird def. als: $L(s,\varrho) := \prod_p \det\left(1 - \frac{\varrho(\sigma_p)}{p^s}\right)^{-1}$.

Für abelsches $K$ und eindim. $\varrho$ zeigte Artin, daß $L(s,\varrho)$ identisch zu einer Dirichletschen L-Fkt. $L(s,\psi)$ mit geeignetem Charakter $\psi$ mod $q$ ist.

Eine der grundlegensten Vermutungen in der algebraischen ZT ist die

Artinsche Vermutung: Sei $L|K$ eine endl. Galoiserw. mit Galoisgr. $G$.
Für jeden irred. Charakter $\chi \neq 1$ von $G$ läßt sich die Artin-L-Fkt. $L(s,\chi,L|K)$ zu einer ganzen Funktion fortsetzen.

Bemerkungen:

1. Die Dedekindsche Vermutung besagt, daß der Quotient $\zeta_L/\zeta_K(s)$ ganz ist, sofern $L|K$ eine Erweiterung von $\mathbb{Z}K$ ist, nicht unbedingt galoissch.
Die Dedekindsche Vermutung wurde im Spezialfall, wenn $L|K$ endlich oder galoisch ist, bewiesen. Sie ist eine Folgerung der Artinschen Vermutung.
2. Artin zeigte seine Vermutung für eindimensionale $\chi$, wenn $L|K$ abelsch ist; in diesem Fall ist die zugeh. Artin-L-Fkt. identisch mit einer Hecke-L-Fkt.:
"Artinsches Reziprozitätsgesetz":

Satz 10.1: Sei $L|K$ abelsch, $\rho \neq 1$ ein irred. Charakter von $G = Gal(L|K)$.
Dann ex. ein Hecke-Größencharakter $\Psi$ mit $L(s,\rho,L|K) = L(s,\Psi)$.

Artin benutzte Klassenkörpertheorie und den Dichtesatz von Chebotarev für sein Ergebnis.

Sei $L|K$ endl. galois mit $G = Gal(L|K)$, $C \subseteq G$ abg. unter Konjugation.
Weiter sei $\pi_C(x)$ die Anzahl von Primidealen $\mathfrak{p}$ von $K$, die unverzweigt in $L$ sind und für die $\sigma_\mathfrak{p} \subseteq C$ ist mit Norm $N(\mathfrak{p}) \leq x$ in $K$.
Dann besagt der Dichtesatz von Chebotarev, daß

$$\pi_C(x) \sim \frac{\# C}{\# G}\pi(x) \text{ gilt.}$$

Dieser tiefe Satz ist ein höheres Analog für den PZS in APs und hat zahlreiche Anwendungen.

3. Brauer zeigte für die Artin L-Fktn. eine Funktionalgleichung, die eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ erlaubt.
Die Holomorphie nichtabelscher Artin-L-Fktn. ist bislang unbewiesen, insb. im kritischen Streifen. In Spezialfällen ist die Artin-Vermutung unter Annahme anderer Vermutungen bekannt:

Satz 10.2: Die Selberg-Vermutung (B) impliziert die Artin-Vermutung.

(Dabei konnte die Ann. der Selberg-Vermutung (B) durch die (PCC) ersetzt werden.)

Bew.: Sei $\tilde{L}$ der normale Abschluß von $L|\mathbb{Q}$. Dann sind $\tilde{L}|K$ und $\tilde{L}|\mathbb{Q}$ galoisch. Somit entspricht $\chi$ einem Charakter $\tilde{\chi}$ von $Gal(\tilde{L}|\mathbb{Q})$.
Nach den Eigenschaften von Artin-L-Fktn. ist $L(s,\tilde{\chi},\tilde{L}|K) = L(s,\chi,L|K)$.
Nach einem Satz von Brauer ("Induktionssatz von Brauer") ist jeder Charakter $\tilde{\chi}$ einer endl. Gruppe $G$ im wesentlichen eine $\mathbb{N}_0$-Linearkombination bestimmter induzierter eindim. Charaktere $\Psi$ von UG von $G$.
Somit folgt durch die Induktion von $\tilde{\chi}$ von $Gal(\tilde{L}|K)$ auf $Gal(L|K)$, daß $L(s,\chi,L|K) = \prod_{\Psi} L(s,\Psi,\tilde{L}|\mathbb{Q})^{m(\Psi)}$, $\Psi$ irred. Ch. auf $Gal(\tilde{L}|\mathbb{Q})$, $m(\Psi)\in\mathbb{N}_0$.
Also:
Zum Beweis der Artin-Vermutung gen. z.z., daß alle $L(s,\Psi,\tilde{L}|\mathbb{Q})$ ganz sind.
Nach Brauers Induktionssatz und dem Artinschen Reziprozitätsgesetz (Satz 10.1) gilt $L(s,\Psi,\tilde{L}|\mathbb{Q}) = \frac{L(s,\chi_1)}{L(s,\chi_2)}$ mit Charakteren $\chi_1,\chi_2$ von $Gal(\tilde{L}|\mathbb{Q})$, wo $L(s,\chi_1)$, $L(s,\chi_2)$ Produkte von Hecke-L-Fktn. sind, die zu $\mathcal{S}$ gehören.
Da $\mathcal{S}$ mult. abg., sind auch $L(s,\chi_1), L(s,\chi_2)\in\mathcal{S}$.
Nach Satz 10.2 ex. primitive Fktn. $\mathcal{L}_j\in\mathcal{S}$ mit $L(s,\Psi,\tilde{L}|\mathbb{Q}) = \prod_{j=1}^{t}\mathcal{L}_j(s)^{e_j}$, wo die $e_j\in\mathbb{Z}$. Durch Vgl. des $p$-ten Koeff. in der Dirichletreihenentwicklung beiderseits erhalten wir $\Psi(p) = \sum_{j=1}^{t} e_j\, a_{\mathcal{L}_j}(p)$, also gilt

$$\sum_{p\le x}\frac{|\Psi(p)|^2}{p} = \sum_{p\le x}\frac{1}{p}\Big|\sum_{j=1}^{t} e_j\, a_{\mathcal{L}_j}(p)\Big|^2. \qquad \circledast$$

Mit Selbergs Vermutung (B) erhalten wir die Asymptotik
$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}\Big|\sum_{j=1}^{\ell} e_j a_{\mathcal{Y}_{d_j}}(p)\Big|^2=\Big(\sum_{j=1}^{\ell}e_j^2\Big)\log\log x+O(1).$$

Nun zerlegen wir hier die l.S. von ⊛ gemäß den Konjugationsklassen $C$ von $G:=\mathrm{Gal}(\tilde{L}|\mathbb{Q})$, zu denen das Frobeniuselement $\sigma_p$ gehört.
Ist $g_C\in C$, zeigt dies $\displaystyle\sum_{p\le x}\frac{|\chi(p)|^2}{p}=\sum_C|\chi(g_C)|^2\sum_{\substack{p\le x\\ \sigma_p\in C}}\frac{1}{p}$.

Partielle $\Sigma$ liefert aus dem Dichtesatz von Chebotarev, daß
$$\sum_{\substack{p\le x\\ \sigma_p\in C}}\frac{1}{p}=\frac{\#C}{\#G}\log\log x+O(1),$$
es folgt
$$\sum_{p\le x}\frac{|\chi(p)|^2}{p}=\sum_C|\chi(g_C)|^2\frac{\#C}{\#G}\log\log x+O(1).$$

Da $\chi$ irred., folgt $\displaystyle\sum_C|\chi(g_C)|^2\frac{\#C}{\#G}=\frac{1}{\#G}\sum_C\#C=1$,
was mit obigem $\sum_{j=1}^{\ell}e_j^2=1$ impliziert. Also ist $\ell=1$ und $e_1=\pm1$.

Der Fall $e=-1$ zeigt $L(s,\chi,\tilde{L}|\mathbb{Q})=\frac{1}{\mathcal{L}_1(s)}$, ↯, da $L(s,\chi,\tilde{L}|\mathbb{Q})$ triviale Nst. hat laut Funktionalglg. Also ist $e_1=+1$ und somit $L(s,\chi,\tilde{L}|\mathbb{Q})=\mathcal{L}_1(s)$ ganz. □

Der Beweis zeigt:
Ist $\chi$ irred. nichttriv. Charakter von $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$, so ist die Artin-L-Fkt. $L(s,\chi,K|\mathbb{Q})\in\mathcal{S}$, falls Selbergs Vermutung (B) wahr ist.
Unter diesen Vor. ist $L(s,\chi,K|\mathbb{Q})$ sogar primitiv.