Die Selberg-Klasse

(2-std. Spezialvorlesung im SoSe 2013)

§5. Primitivität und die Selberg-Vermutungen I

Die Selberg-Klasse ist multiplikativ abgeschlossen.
Daher ist sinnvoll, von primitiven Elementen zu sprechen.

<u>Def. 5.1:</u> $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ heißt primitiv $:\Leftrightarrow \forall \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathcal{S}: (\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2 \Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \vee \mathcal{L} = \mathcal{L}_2)$

Faktorisierung in primitive Funktionen

<u>Satz 5.2:</u> Jede Funktion $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ läßt sich in primitive Funktionen faktorisieren.

<u>Bew.:</u> Sei $\mathcal{L}$ nicht primitiv. Dann ex. $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathcal{S} \setminus \{1\}: \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2$.
Mit $N_{\mathcal{L}}(T) \sim \frac{d_{\mathcal{L}}}{\pi} T \log T$ haben wir wegen $N_{\mathcal{L}}(T) = N_{\mathcal{L}_1}(T) + N_{\mathcal{L}_2}(T)$ (beachten, daß Nullstellen gemäß Vielfachheiten gezählt werden), also dann $d_{\mathcal{L}} = d_{\mathcal{L}_1} + d_{\mathcal{L}_2}$. Wegen Satz 1.1 haben $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ beide mind. den Grad 1, also ist $d_{\mathcal{L}_1} < d_{\mathcal{L}}$ und $d_{\mathcal{L}_2} < d_{\mathcal{L}}$.
Die Fortführung dieses Prozesses endet, da die Anzahl Faktoren $\leq d_{\mathcal{L}}$. $\square$

Wegen <u>Satz 1.1</u> folgt, daß jedes $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ mit $d_{\mathcal{L}} = 1$ primitiv ist, z.B. ζ und $L(s,\chi)$ für primitive Charaktere χ.
Im Gegensatz dazu sind Dedekindsche Zetafunktionen zu Kreisteilungskörpern $\neq \mathbb{Q}$ nicht primitiv.

Im folgenden untersuchen wir die Eindeutigkeit der Faktorisierung in primitive Elemente.

Dazu sei $a_{\mathcal{L}}(n)$ der n-te Koeff. der Dirichlet-Σ von $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$.

Selberg's Vermutungen

(A) Für alle $\mathcal{L} \in \mathcal{S} \setminus \{1\}$ ex. $m_{\mathcal{L}} \in \mathbb{N}$: $\sum_{p \leq x} \frac{|a_{\mathcal{L}}(p)|^2}{p} = m_{\mathcal{L}} \log\log x + O(1)$.

(B) Für alle primitiven $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathcal{S}$:

$$\sum_{p \leq x} \frac{a_{\mathcal{L}_1}(p)\overline{a_{\mathcal{L}_2}(p)}}{p} = \begin{cases} \log\log x + O(1), & \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 \\ O(1), & \mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2 \end{cases}$$

In gewisser Hinsicht verhalten sich primitive Funktionen nach diesen Vermutungen wie ein orthonormales System.

Mit Blick auf Satz 5.2 ist leicht zu sehen, daß (B) $\Rightarrow$ (A) gilt.
In bestimmten Fällen kann (A) verifiziert werden:
z.B. erfüllt ζ die Aussage in (A), und ebenso die $L(s,\chi)$, χ primitiv.
Die Aussage (B) wurde
für automorphe L-Funktionen $L(s,\pi)$, $L(s,\pi')$ bewiesen,
wobei π, π' automorphe irred. Spitzendarst. von $GL_m(\mathbb{Q})$ bzw.
$GL_{m'}(\mathbb{Q})$ mit $m, m' \leq 4$ und sonst unter der Ann. der Konvergenz von
$\sum_p \frac{|a_\pi(p^k)|^2}{p^k}(\log p)^2$ für $k \geq 2$, wo $a_\pi(n)$ die Dirichlet-Σ-Koeff. von $L(s,\pi)$.
Diese Konvergenz ist eine direkte Folge der Ramanujan-Hypothese.

Satz 5.3: (B) impliziert, daß jedes $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ eine eind. Zerl. in primitive El. hat.

Bew.: Ann.: $\mathcal{L} = \prod_{j=1}^m \mathcal{L}_j = \prod_{k=1}^n \tilde{\mathcal{L}}_k$ seien zwei verschiedene solche Zerlegungen,
und sei OE kein $\tilde{\mathcal{L}}_k$ gleich $\mathcal{L}_1$.
Dann folgt aus $\sum_{j=1}^m a_{\mathcal{L}_j}(p) = \sum_{k=1}^n a_{\tilde{\mathcal{L}}_k}(p)$, daß $\underbrace{\sum_{j=1}^m \sum_{p \leq x} \frac{a_{\mathcal{L}_j}(p)\overline{a_{\mathcal{L}_1}(p)}}{p}}_{\xrightarrow{x\to\infty} \infty \text{ wg. (B)}} = \underbrace{\sum_{k=1}^n \sum_{p \leq x} \frac{a_{\tilde{\mathcal{L}}_k}(p)\overline{a_{\mathcal{L}_1}(p)}}{p}}_{\text{beschr. für } x\to\infty \text{ wg. (B)}}$, $\lightning$ $\square$

Primzahlsätze

Die Selberg-Vermutungen haben Konsequenzen für das anal. Verhalten am Rande des kritischen Streifens:

Satz 5.4: Sei $\mathcal{L}\in\mathcal{S}$. Ist (B) wahr, so folgt $\mathcal{L}(s)\neq 0$ für alle $\sigma\geq 1$.

Es wird vermutet, daß $\mathcal{S}$ nur aus automorphen L-Fktn. besteht; für diese wurde dieser Satz 5.4 ohne Ann. unbewiesener Vermutungen (oAuV) gezeigt.

Wir benötigen im Beweis von Satz 5.4 folgendes

Lemma 5.4A: Sei $\mathcal{L}\in\mathcal{S}$, $\mathcal{L}$ habe in $s=1$ einen Pol der Ordnung m. Ist (B) wahr, so gilt $\zeta^m(s)\mid\mathcal{L}(s)$ in $\mathcal{S}$, d.h. $\frac{\mathcal{L}(s)}{\zeta^m(s)}\in\mathcal{S}$.

Bew.: • Sei zunächst $\mathcal{L}\in\mathcal{S}$ primitiv.

Wegen dem Pol bei $s=1$ gilt $\log|\mathcal{L}(\sigma)|\sim(-m)\log(\sigma-1)\xrightarrow[\sigma\to 1+]{}\infty$ (*).

Dann ist $\mathcal{L}=\zeta$.

⌜Sonst folgt aus (B), da $\mathcal{L},\zeta$ primitiv sind: $\sum_{p\leq x}\frac{a_{\mathcal{L}}(p)\cdot\overline{a_{\zeta}(p)}}{p}=\sum_{p\leq x}\frac{a_{\mathcal{L}_1}(p)}{p}=O(1)$,

für $\sigma>1$ ist weiter $\log\mathcal{L}(s)=\sum_{p\leq x}\frac{a_{\mathcal{L}_1}(p)}{p^s}+O(1)$,

so daß $|\log\mathcal{L}(s)|$ für $\sigma>1$ beschr. ist, im $\lightning$ zu (*). ⌟

Somit: Hat ein primitives $\mathcal{L}$ einen Pol in $s=1$, ist $\mathcal{L}=\zeta$.

• Sei im allgemeinen Fall $\mathcal{L}(s)=\prod_{i=1}^{k}\mathcal{L}_i(s)$ die Zerlegung in primitive $\mathcal{L}_i\in\mathcal{S}$.
Hat $\mathcal{L}$ bei $s=1$ einen m-fachen Pol, dann auch $k\geq 1$ viele Faktoren, die nach dem ersten Teil alle $=\zeta$ sind. Dann muß $k=m$ sein, und $\zeta^m(s)\mid\mathcal{L}(s)$ in $\mathcal{L}$. □

Bew. von Satz 5.4:

Bem: Wegen der Euler-Π-Darst. in $\sigma>1$ können Nst. in $\sigma\geq 1$ nur auf $\sigma=1$ sein.
Sei nun $\mathcal{L}\in\mathcal{S}$. Hat $\mathcal{L}$ einen Pol, schreiben wir wegen dem Lemma $\mathcal{L}(s)=\zeta^m(s)\hat{\mathcal{L}}(s)$, ansonsten $\mathcal{L}(s)=\hat{\mathcal{L}}(s)$ mit einer ganzen Fkt. $\hat{\mathcal{L}}\in\mathcal{S}$.
Da ζ auf $\sigma=1$ nicht verschwindet, gilt dies dann auch für $\mathcal{L}$, falls dem so für $\hat{\mathcal{L}}$ ist.

Mit Satz 5.2 zerlegen wir $\tilde{\mathcal{L}}$ in primitive, ganze Funktionen in $\mathcal{S}$.
Es genügt dann, den Satz für primitive, ganze $\mathcal{L}_0 \in \mathcal{S}$ zu zeigen.
Sei dazu $\mathcal{L}_0$ derart. Dann: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\mathcal{L}_0(s+i\alpha) \in \mathcal{S}$ ist primitiv.
Vermutung (B) angewandt auf $\mathcal{L}_0(s+i\alpha)$ und $\mathcal{L}(s)$ gibt $\sum_{p \le x} \frac{a_{\mathcal{L}_0}(p)}{p^{1+i\alpha}} \ll 1$.
Ann.: $\mathcal{L}_0(1+i\alpha) = 0$.
Dann ist $\mathcal{L}_0(s) \sim c(s-(1+i\alpha))^k$ für $s = \sigma + i\alpha \to 1+i\alpha$ für ein $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und ein $k \in \mathbb{N}$. Es folgt: $\log \mathcal{L}_0(\sigma) \sim k \cdot \log(\sigma - 1)$ für $\sigma \to 1+$. ⊛
Da $\log \mathcal{L}_0(s) = \sum_p \frac{a_{\mathcal{L}}(p)}{p^s} + O(1)$ für $\sigma > 1$, erhalten wir mit partieller Σ:

$$\log \mathcal{L}_0(\sigma+i\alpha) \sim \sum_p \frac{a_{\mathcal{L}}(p)}{p^{\sigma+i\alpha}} = (\sigma-1) \int_1^\infty \underbrace{\sum_{p \le x} \frac{a_{\mathcal{L}}(p)}{p^{1+i\alpha}}}_{\ll 1} \cdot \frac{dx}{x^\sigma},$$

was für $\sigma \to 1+$ beschr. bleibt, im Widerspruch zu ⊛. $\square$

Das Nichtverschwinden von L-Funktionen auf dem Rand des kritischen Streifens ist eng verwandt mit dem Primzahlsatz (PZS), d.h. hier: eine asympt. Formel für die Dirichlet-Σ-Koeff.
Hat eine Fkt. $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ nämlich keine Nst. in $\sigma \ge 1$, so erwarten wir, daß

$$\psi_{\mathcal{L}}(x) := \sum_{n \le x} \Lambda_{\mathcal{L}}(n) \underset{(PZS)}{=} k_{\mathcal{L}} x + o(x), \quad \text{wo } k_{\mathcal{L}} = \begin{cases} 0, & \mathcal{L}(s) \text{ regulär in } s=1, \\ \text{Polordnung von } \mathcal{L} \text{ in } s=1, & \text{sonst} \end{cases}$$

und wo $\Lambda_{\mathcal{L}}(n)$ die durch $-\frac{\mathcal{L}'(s)}{\mathcal{L}(s)} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda_{\mathcal{L}}(n)}{n^s}$ definierte von Mangoldt-Fkt. ist.

Man erwartet auch, daß $\psi_{\mathcal{L}}(x) = k_{\mathcal{L}} x + o(x)$ äquivalent zum Nichtverschwinden von $\mathcal{L}$ auf $\sigma = 1$ ist.
Für polynomielle Euler-Π in $\mathcal{S}$ läßt sich dies leicht zeigen, also für Produkte $\mathcal{L}(s) = \prod_p \prod_{j=1}^m \left(1 - \frac{\alpha_j(p)}{p^s}\right)^{-1}$, wo $m \in \mathbb{N}$ fest, die $\alpha_j(p) \in \mathbb{C}$.
(Ohne Beweis, ginge mit einem Taubersatz. Weiter kann man (dazu) mit der Ramanujan-Hypothese leicht $|\alpha_j(p)| \le 1$ zeigen.) Es folgt:

Korollar 5.5: Es gelte (B). Dann gilt der PZS für die genannten polynomiellen Euler-Π in $\mathcal{S}$.

(B) könnte eine zu starke Bedingung sein, wenn man den PZS für eine einzige L-Fkt. möchte. Dafür gibt es eine Abschwächung von (A):

Normalitätsvermutung: Für alle $\mathcal{L} \in \mathcal{S} \setminus \{1\}$ ex. $k_{\mathcal{L}} \in \mathbb{N}_0$: $\sum_{p \leq x} \frac{|a_{\mathcal{L}}(p)|^2}{p} = k_{\mathcal{L}} \log\log x + o(\log\log x)$.

Mit dieser Vermutung konnten Kaczorowski & Perelli das Nichtverschw. von $\mathcal{L}$ auf $\sigma = 1$ zeigen, was äquivalent zum PZS ist.
Ihr Beweis verwendet die Normalitätsvermutung, um $\mathcal{L}(1 + i\mathbb{R}) \neq 0$ zu zeigen.
Dabei wird dieser Dichtesatz für $\mathcal{S}$ gezeigt:
Sei $N_{\mathcal{L}}(\sigma, T) := \#\{\rho = \beta + i\gamma;\ \mathcal{L}(\rho) = 0,\ \beta > \sigma,\ |\gamma| < T\}$ (wie immer mit Vielfachen gezählt!),
dann zeigten sie glm. in $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$, daß $N_{\mathcal{L}}(\sigma, T) \ll T^{4(d_{\mathcal{L}}+3)(1-\sigma)+\varepsilon}$.
Diese Absch. ist allerdings nur für $\sigma \approx 1$ nützlich.