Die Selberg-Klasse

(2-std. Spezialvorlesung im SoSe 2013)

§3. Die Riemann-von Mangoldt-Formel II

Summen über c-Stellen

Sei $c \in \mathbb{C}$. Lösungen von $\mathcal{L}(s) = c$ heißen c-Stellen von $\mathcal{L}$.

Levinson [1975]: Alle (bis auf $\ll \frac{N(T)}{\log\log T}$ viele) c-Stellen in $T < t < 2T$ liegen in $|\sigma - \frac{1}{2}| < \frac{(\log\log T)^2}{\log T}$.

Die c-Stellen liegen also um die kritische Gerade herum verteilt.
Wir zeigen nun, dass diese Verteilung der c-Stellen ein typisches Verhalten für L-Funktionen der Selberg-Klasse ist.
Wir bezeichnen die c-Stellen im Folgenden mit $\rho_c = \beta_c + i\gamma_c$ und zeigen nun in diesem § eine Abschätzung für Summen über c-Stellen von $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$, gewichtet gemäß ihrem Realteil:

Satz 3.1: Sei $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ und $c \neq 1$. Für $b > \max\{\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_{\mathcal{L}}}\}$ gilt dann:
$$\sum_{\substack{\beta_c > b \\ T < \gamma_c < 2T}} (\beta_c - b) \ll T.$$

Unter Ann. der Lindelöf-Vermutung, d.h. $\mathcal{L}(\frac{1}{2} + it) \ll t^{\varepsilon}$ für $t \to \infty$, bel. $\varepsilon > 0$, gilt:
$$\sum_{\substack{\beta_c > \frac{1}{2} \\ T < \gamma_c < 2T}} (\beta_c - \tfrac{1}{2}) = o(T \log T).$$

Bem.: Der Fall $c = 1$ ist ausgenommen wegen $\mathcal{L}(s) = 1 + O(2^{-\sigma})$ für $\sigma \to \infty$.
Man kann aber anderweitig Abschätzungen für $c = 1$ finden.
Weiter arbeiten wir in $\mathcal{S}$ (nicht in der erweiterten Selberg-Klasse $\mathcal{S}^\#$), da wir Axiom $\boxed{1.}$ $=$ Ramanujan-Hypothese $a(n) \ll n^{\varepsilon}$ benutzen werden.

Beweis: Es ex. $A = A(c) > 0$, so dass alle $\beta_c < A$.
Setze $\ell(s) := \frac{\mathcal{L}(s) - c}{1 - c}$, d.h. Nst. von ℓ sind c-Stellen von $\mathcal{L}$.
($c \neq 1$ ist sinnvoll, die Reihe von ℓ fängt dann auch mit Summand 1 an.)

Nun wenden wir <u>Littlewood's Lemma</u> (§0) an auf das Rechteck R mit Ecken $a+iT$, $a+2iT$, $b+iT$, $b+2iT$, wo $a>b$, und erhalten

$$\int_{\substack{\partial R\\(\circlearrowleft)}} \log \ell(s)\,ds = -2\pi i \int_b^a \nu(\sigma,T)\,d\sigma ,$$

hier: $\log z = \log|z| + i\arg(z)$

zur Def. von $\log \ell(s)$ wählen wir den <u>Hauptzweig des log</u> auf der Re-Achse, wo $\sigma\to\infty$, und für andere s die analytische Fortsetzung.

OE seien keine Nullstellen auf dem Rand von R, damit die l.S. def. ist.

Nun gilt:

$$\mathbb{R} \ni \sum_{\substack{\beta_\varrho>b\\T<\gamma_\varrho<2T}} (\beta_\varrho - b) = \sum_{\substack{\beta_\varrho>b\\T<\gamma_\varrho<2T}} \int_b^{\beta_\varrho} d\sigma = \int_b^a \sum_{\substack{\beta_\varrho>\sigma\\T<\gamma_\varrho<2T}} 1\,d\sigma = \int_b^a \nu(\sigma,T)\,dT$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{\partial R\\(\circlearrowright)}} \log \ell(s)\,ds = \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_T^{2T} i\log|\ell(b+it)|\,dt + i\underline{\int_T^{2T} i\arg \ell(b+it)\,dt}$$

$$- \int_T^{2T} i\log|\ell(a+it)|\,dt - i\underline{\int_T^{2T} i\arg \ell(a+it)\,dt}$$

$$- \underline{\int_b^a \log|\ell(\sigma+iT)|\,d\sigma} - i\int_b^a \arg \ell(\sigma+iT)\,d\sigma$$

$$+ \int_b^a \underline{\log|\ell(\sigma+2iT)|\,d\sigma} + i\int_b^a \arg \ell(\sigma+2iT)\,d\sigma\Big)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big(\int_T^{2T} \log|\ell(b+it)|\,dt - \int_T^{2T} \log|\ell(a+it)|\,dt - \int_b^a \arg \ell(\sigma+iT)\,d\sigma + \int_b^a \arg \ell(\sigma+2iT)\,d\sigma\Big),$$

$$=: \sum_{j=1}^4 I_j.$$

Dabei wurde verwendet, daß der Ausdruck reell ist, die <u>rein imaginären Terme</u> müssen also verschwinden.

Es bleibt z.z., daß alle 4 Wegintegrale $\ll T$ sind, bzw. $o(T\log T)$ für $b=\frac{1}{2}$ unter Ann. der Lindelöf-Verm.

Die vertikalen Wegintegrale:

• I_1: Haben $I_1(T,b) := I_1 = \int_T^{2T} \log|\mathcal{L}(b+it)-c|\,dt - T\log|1-c|$.

Nach der Jensenschen Unglg. für konkave Funktionen f (nämlich der Unglg. $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y(t))\,dt \le f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b y(t)\,dt\right)$ für konkave f, vgl. §0),

ist das Integral $\le \frac{T}{2}\log\left(\frac{1}{T}\int_T^{2T} |\mathcal{L}(b+it)|^2\,dt\right) + O(T)$, da $\log:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}$ konkav.

Jetzt benutzen wir unsere Vorüberlegungen zum Quadratmittel aus §2:
Wegen Kor. 2.4, dem Kor. aus dem Satz von Potter, ist dies $\ll T$ für $b > \max\{\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{d_{\mathcal{L}}}\}$,
also ist dann: $I_1(T,b) \ll T$. ✓
Mit der Lindelöf-Vermutung folgt $\int_T^{2T} |\mathcal{L}(\frac{1}{2}+it)|^2\,dt \ll T^{1+\varepsilon}$ für alle $\varepsilon>0$,
also $I_1(T,\frac{1}{2}) \ll \varepsilon\cdot T\log T$, d.h. $I_1(T,\frac{1}{2}) = o(T\log T)$. ✓

• I_2: Für $a>1$ gilt $\ell(a+it) = 1 + \frac{1}{1-c}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a(n)}{n^{a+it}}$, (*)
und der Betrag der Reihe ist <1 für hinr. große a.

Mit der Taylor-$\sum$ für den log erhalten wir:

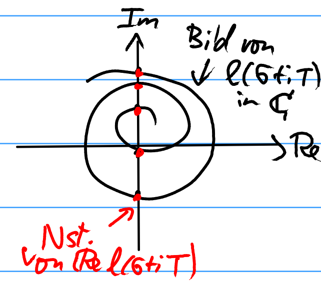
$$\log|\ell(a+it)| = \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k(1-c)^k}\sum_{m_1=2}^{\infty}\cdots\sum_{m_k=2}^{\infty}\frac{a(m_1)\cdots a(m_k)}{(m_1\cdots m_k)^{a+it}},$$

mit der Ramanujan-Hypothese führt dies auf

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k(1-c)^k}\sum_{m_1=2}^{\infty}\cdots\sum_{m_k=2}^{\infty}\frac{a(m_1)\cdots a(m_k)}{(m_1\cdots m_k)^{a}}\cdot\overbrace{\int_T^{2T}\frac{dt}{(m_1\cdots m_k)^{it}}}^{\text{beschr.!}}$$

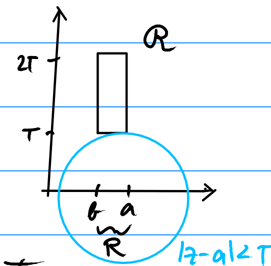
$$\ll \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{a-\varepsilon}}\right)^k \ll 1 \quad \text{für hinr. große } a.$$
✓

Zu den horizontalen Wegintegralen:



- $\underline{\underline{I_3}}$: Re $\ell(\sigma+iT)$ habe N Nullst. für $b \le \sigma \le a$.
  Teilen dann $[b,a]$ in höchst. $N+1$ viele TeilIVe,
  in denen Re $\ell(\sigma+iT)$ von konstantem VZ ist.

Dann ist $|\arg \ell(\sigma+iT)| \le (N+1)\pi$. (*)



Zur Absch. von N setze $g(z) := \frac{1}{2}\left(\ell(z+iT) + \overline{\ell(\bar{z}+iT)}\right)$,
dann ist $g(\sigma) = \mathrm{Re}\,\ell(\sigma+it)$.
Sei $R := a-b$, und wähle $T > 2R$.
Für $|z-a|<T$ ist dann $\mathrm{Im}(z+iT)>0$.
Somit ist $\ell(z+iT)$, also $g(z)$, analytisch für $|z-a|<T$.
(Die einzig mögl. Singularität von ℓ bei $s=1$ wird nicht angenommen.)

$\leadsto |z-a|<2R$ liegt darin

Sei $n(r)$ die Nullstellenanzahl von $g(z)$ in $|z-a|\le r$.
Offenbar gilt

$$\int_0^{2R} \frac{n(r)}{r}\,dr \ge n(R)\int_R^{2R}\frac{dr}{r} = n(R)\log 2.$$

Nach der
Jensenschen Formel, vgl. §0,

$$\text{ist } \int_0^{2R}\frac{n(r)}{r}\,dr = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(a+2Re^{i\theta})|\,d\theta - \log|g(a)|,$$

also

$$n(R) \le \frac{1}{2\pi\log 2}\int_0^{2\pi}\log|g(a+2Re^{i\theta})|\,d\theta - \frac{\log|g(a)|}{\log 2}.$$

Mit (*) folgt, daß $\log|g(a)|$ beschränkt für $T\to\infty$ ist.

Wegen Satz 2.2 (Absch. v. $\mathcal{L}$) gilt in jedem vertikalen Streifen beschränkter Breite

$$\mathcal{L}(s) \ll |t|^B \text{ für ein gewisses } B>0,$$

und ebenso für $g(z)$.

Damit ist obiges Integral $\int_0^{2\pi} \log|g(\dots)|d\theta \ll \log T$, also $n(R) \ll \log T$.
Da $]b,a[\subseteq \{z \in \mathbb{C};\ |z-a| \le R\}$, ist $N \le n(R)$.

Mit (+) erhalten wir $|I_3| \le \frac{1}{2\pi}\int_b^a |\arg \mathcal{L}(\sigma+iT)|\,d\sigma \ll \log T$.

- I_4: kann ebenso wie I_3 abgeschätzt werden. □

Nun behandeln wir die meisten c-Stellen.
Nach Satz 2.2 ex. $C', T' > 0$ so, daß keine c-Stellen in $\sigma < -C'$, $t \ge T'$.

Daher nehmen wir $b < -C'-1$, $T \ge T'+1$ an.
Dann gilt wg. der Funktionalglg.: [$\mathcal{L}(s) - c = \Delta_{\mathcal{L}}(s)\bar{\mathcal{L}}(1-\bar{s}) - c = \Delta_{\mathcal{L}}(s)\bar{\mathcal{L}}(1-\bar{s})\left(1 - \frac{c}{\Delta\bar{\mathcal{L}}}\right)$]

$$\log|\mathcal{L}(s)-c| = \log|\Delta_{\mathcal{L}}(s)| + \log|\bar{\mathcal{L}}(1-\bar{s})| + O\left(\frac{1}{|\Delta_{\mathcal{L}}(s)\bar{\mathcal{L}}(1-\bar{s})|}\right).$$

Mit Lemma 2.1 folgt:

[$\Delta_{\mathcal{L}}(s) = (\lambda Q^2 t^{d_{\mathcal{L}}})^{\frac{1}{2}-\sigma-it} \cdot \exp(i\dots) \cdot (\omega + O(\frac{1}{t}))$]

$$\int_T^{2T} \log|\mathcal{L}(b+it)-c|\,dt = \left(\tfrac{1}{2}-b\right)\int_T^{2T}\left(d_{\mathcal{L}}\log t + \log(\lambda Q^2)\right)dt + \int_T^{2T}\log|\mathcal{L}(1-b-it)|\,dt + O(\log T).$$

Nun sei $c \ne 1$. Das erste $\int$ auf der r.S. kann elementar berechnet werden, und das zweite $\int$ ist klein, falls $-b$ genügend groß gewählt werden kann (vgl. I_2).
Somit ist:

$$I_1 = \left(\tfrac{1}{2}-b\right)\cdot\left(d_{\mathcal{L}}\, T\log\frac{4T}{e} + T\log(\lambda Q^2)\right) - T\log|1-c| + O(\log T).$$

Mit den obigen Absch. für die I_j's erhalten wir:

Satz 3.2: Sei $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ und $c \ne 1$, $b < 0$, $|b|$ hinr. groß. Dann gilt:

$$2\pi \sum_{T < \gamma_c < 2T} (\beta_c - b) = \left(\tfrac{1}{2}-b\right)\cdot\left(d_{\mathcal{L}}\, T\log\frac{4T}{e} + T\log(\lambda Q^2)\right) - T\log|1-c| + O(\log T).$$