Die Selberg-Klasse

(2-std. Spezialvorlesung im SoSe 2013)

§1. Definition und Struktur der Selberg-Klasse

Die Selberg-Klasse $\mathcal{S}$ ist die Menge der Dirichlet-Reihen

$$\mathcal{L}(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s},$$

die folgende Eigenschaften $\boxed{1}$ - $\boxed{4}$ besitzen:

$\boxed{1}$ Ramanujan-Hypothese: $a(n) \ll n^{\varepsilon}$ für jedes $\varepsilon > 0$

$\boxed{2}$ Analytische Fortsetzung: $\exists\, k \in \mathbb{N}_0$: $(s-1)^k \mathcal{L}(s)$ ist ganze Fkt. endlicher Ordnung, d.h. ihre Ordnung $\inf\{\alpha;\ |(s-1)^k \mathcal{L}(s)| \ll \exp(|s|^{\alpha})\}$ existiert.

$\boxed{3}$ Funktionalgleichung: $\exists\, f \in \mathbb{N}_0\ \forall j,\ 1 \le j \le f\ \exists\, Q, \lambda_1, \dots, \lambda_f > 0$
$\exists\, \mu_1, \dots, \mu_f, \omega \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} \mu_j \geq 0,\ |\omega| = 1$:

$$\boxed{\Lambda_{\mathcal{L}}(s) = \omega\, \overline{\Lambda_{\mathcal{L}}(1-\bar{s})}}$$

wo $\Lambda_{\mathcal{L}}(s) := \mathcal{L}(s)\, Q^s \prod_{j=1}^{f} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j)$ die vollständige L-Fkt. ist.
(complete L-function)

$\boxed{4}$ Euler-Produkt: $\mathcal{L}(s)$ erfüllt $\boxed{\mathcal{L}(s) = \prod_p \mathcal{L}_p(s)}$

wo $\mathcal{L}_p(s) := \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(p^k)}{p^{ks}} \right)$

mit geeigneten Koeffizienten $b(p^k)$, die $b(p^k) \ll p^{k\theta}$ für ein $\theta < \frac{1}{2}$ erfüllen.

Bem.: Aus $\boxed{4}$ folgt: $\log \mathcal{L}(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b(n)\Lambda(n)}{n^s \log n}$, die $b(n) \ll n^{\theta}$ für ein $\theta < \frac{1}{2}$.
(Setze $b(n) = 0$, falls n keine Primpotenz ist.)
Oft wird das 4. Axiom so formuliert.
Die $\mathcal{L}_p$ heißen Euler-Faktoren.

Die Ramanujan-Hypothese impliziert, dass eine Dirichlet-Reihe $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ in $\mathrm{Re}\, s =: \sigma > 1$ absolut konvergiert, und dies gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge der Halbebene $\sigma > 1$.

Daher sind die $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ analytisch in $\sigma > 1$, und somit ist es sinnvoll, von einer analytischen Fortsetzung zu sprechen.

Die Euler-Produkt-Eigenschaft zeigt, dass die Koeffizienten $a(n)$ multiplikativ sind (d.h. also dass $a(mn) = a(m)a(n)$ gilt für $(m,n)=1$), und jeder Euler-Faktor $\mathcal{L}_p(s)$ hat die Dirichlet-Reihen-Darstellung

$$\mathcal{L}_p(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(p^k)}{p^{ks}},$$ was für $\sigma > 0$ absolut konvergiert.

(log davon nehmen und in Dirichlet-Reihe entwickeln liefert Koeff. $b(p^k)$.)

Beispiele:

① Die Riemannsche ζ-Fkt. $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für $\sigma > 1$ und ihre Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, nämlich $\zeta(s) := 1 + \frac{1}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{s+1}}\, dx$ für $0 \leq \sigma \leq 1$, und mit der Funktionalglg. für ζ auch für $\sigma < 0$.

$\rightsquigarrow \zeta \in \mathcal{S}$

② Dirichletsche L-Fktn. $L(s,\chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ für $\sigma > 1$ und ihre Fortsetzungen (analog zu ζ) auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, nämlich bei primitivem Charakter χ zu einem Modul q, vgl. §0.

Ein Charakter χ mod q heißt primitiv, falls q die kürzeste Periode von χ ist.

Ist χ mod q, $q \neq 1$, nicht primitiv, so ist $L(s,\chi) \notin \mathcal{S}$ da $L(s,\chi)$ dann keine Funktionalgleichung besitzt. Weiter ist $L(s,\chi) \in \mathcal{S}$ für primitive χ.

③ Dedekindsche Zeta-Funktionen, vgl. §0

④ Hecke L-Funktionen zu modifizierten Modulformen von Hecke-Gruppen, vgl. §7

Bemerkungen:

1. Jedes $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ verschwindet nirgends in der Halbebene absoluter Konvergenz, $\sigma > 1$. (Wg. Euler-Produkt-Darstellung, die komplexe Fkt. exp hat keine Nst.)
2. Wir haben einen kritischen Streifen $0 < \sigma < 1$ und eine kritische Gerade $\sigma = \frac{1}{2}$ aufgrund $\boxed{1.}$, $\boxed{2.}$ und der Funktionalglg. Die Nullstellen von $\mathcal{L}(s)$, die aufgrund der Funktionalgleichung unter den Polstellen der Γ-Faktoren sind, heißen trivial. Diese liegen alle in $\sigma \leq 0$, diese sind unter den Stellen $s = -\frac{k+\mu_j}{\lambda_j}$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq j \leq f$. (Beachte $\operatorname{Re}\mu_j \geq 0$).
3. Alle anderen Nullstellen heißen nichttrivial und liegen in $0 \leq \sigma \leq 1$.
4. I. a. kann nicht ausgeschlossen werden, dass $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ eine triviale und nichttriviale Nst. am selben Punkt s haben (mit $\sigma = 0$).
5. Selberg vermutete, dass genau die El. von $\mathcal{S}$ die Riemannsche Vermutung erfüllen sollten. Dies war die Motivation zur Formulierung der Axiome $\boxed{1.}$-$\boxed{4.}$. Die korrekte Formulierung der R.V. für $\mathcal{S}$ ist die folgende:

Große Riemannsche Vermutung ("Grand Riemann hypothesis", GRH):
Ist $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$, so gilt $\mathcal{L}(s) \neq 0$ für alle s mit $\sigma > \frac{1}{2}$.

Zur Struktur von $\mathcal{S}$:

- $\mathcal{S}$ ist multiplikativ abg., d.h. $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \in \mathcal{S}$ [Simples Prüfen von $\boxed{1.}$ - $\boxed{4.}$].
- Der Grad von $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ ist $d_{\mathcal{L}} := 2 \sum_{j=1}^{f} \lambda_j$, die λ_j aus Γ-Faktoren in der Funktionalgl.

Ist wohldefiniert, obwohl die Darstellung der Funkt.glg. nicht eind. best. sein muss!

Denn: Ist $N_{\mathcal{L}}(T) := \# \{ \varrho;\ \mathcal{L}(\varrho) = 0,\ 0 \le \sigma \le 1,\ |t| \le T \}$ (mit Multipl. gezählt) für $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$, so gilt

$$N_{\mathcal{L}}(T) \sim \frac{d_{\mathcal{L}}}{\pi} \cdot T \log T. \qquad \text{(Beweis in §2)}$$

Bem.: für ζ gilt sogar: $N_\zeta(T) = \frac{T}{\pi} \log \frac{T}{\pi e} + O(\log T)$ [Riemann-von Mangold-Formel, vgl. §0 und Def. von $N_\zeta(T)$, $N(T)$.]

Vermutung: Alle $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ haben ganzzahligen Grad. ("Grad-Vermutung")

Etwas stärker:

Starke λ-Vermutung: Sei $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$. Alle λ_j, die in der Funktionalglg. in den Γ-Faktoren auftreten, können als $\frac{1}{2}$ gewählt werden.
(Es gibt Ergebnisse in dieser Richtung.)

Wir zeigen hier nur:

Satz 1.1: Sei $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$. (1) Ist $d_{\mathcal{L}} = 0$, so ist $\mathcal{L}(s) \equiv 1$.
(2) Ist $d_{\mathcal{L}} > 0$, so ist $d_{\mathcal{L}} \ge 1$.

Bew.-Skizze:

Zu (2): Ann.: $d_{\mathcal{L}} < 1$. Sei $B > 0$ mit $a(n) \ll n^B$.
Mit Perron's Formel folgt (etwas Zusatzüberlegung für Fehlerterm nötig):

$$\sum_{n \le x} a(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \mathcal{L}(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^{c+B}}{T} \right),$$

$c > 1$ konstant gewählt, abs. Kgz. bei $s = c$ vorausgesetzt. (OK für $c > 1$)

Nun $\int$-Weg nach links schieben, Res.-Satz, Phragmén-Lindelöf-Prinzip anwenden, es folgt:

$$\sum_{n \le x} a(n) = x P(\log x) + O\left(x^{(1+B)\frac{d_{\mathcal{L}}-1}{d_{\mathcal{L}}+1} + \varepsilon} \right),$$

wo $P(x)$ ein Polynom gemäß dem Residuum von $\mathcal{L}$ bei $s=1$ ist.

Also: $a(n) \ll_{\underline{\underline{B}}} n^{(1+B)\frac{d_{\mathcal{L}}-1}{d_{\mathcal{L}}+1} + \varepsilon}$ $\circledast$, nach Bilden von $\sum_{m \le n} a(m) - \sum_{m \le n-1} a(m)$.

Für $d_{\mathcal{L}}<1$ ist der Exponent <0, und $B>0$ kann bel. groß gewählt werden.
Dann: $\mathcal{L}$ ist glm. beschr. in jeder rechten Halbebene, $\not\!\!\downarrow$ zu $\mathcal{L}\in\mathcal{S}$
($d_{\mathcal{L}}>0 \Rightarrow \mu_{\mathcal{L}}(\sigma)=(\frac{1}{2}-\sigma)>0$ für $\sigma<0 \Rightarrow \mathcal{L}$ nicht glm. beschr.) Also: in $\mathcal{S}$ ex. kein $\mathcal{L}$ mit $0<d_{\mathcal{L}}<1$.
↳ Satz 2.2 später in §2

Zu (1): Sei $d_{\mathcal{L}}=0$, dann ist $Q^s\mathcal{L}(s)=\omega\, Q^{1-s}\,\overline{\mathcal{L}(1-\bar{s})}$ ohne Γ-Faktoren.
wegen ⊛ sind die a_n so klein, daß $\mathcal{L}$ in ganz $\mathbb{C}$ kgt. Haben dann:
$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\left(\frac{Q^2}{n}\right)^s=\omega\, Q\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{a(n)}}{n}\cdot n^s$ als Identität abs. kgt. "verallgemeinerter" Dirichlet-Reihen.

Für $a(n)\neq 0$ ist dann $\frac{Q^2}{n}\in\mathbb{Z}$, insb. $q:=Q^2\in\mathbb{N}$ (Id.satz auch für "verallg." D-Reihen).
Da Q^2 nur endl. viele Teiler hat, folgt, dass $\mathcal{L}$ ein Dirichlet-Polynom ist.
Ist $q=1$, ist $\mathcal{L}(s)\equiv 1$, daher sei OE $q>1$.
$a(n)$ mult. $\Rightarrow a(1)=1$, $a(1)\,Q^{2s}=\omega\, Q^{-1}\,\overline{a(Q^2)}\,Q^{2s}$, also $|a(q)|=Q$.
Insb. ex. p mit $p^{\nu}\,\|\, q$ und $\nu>1$, also $|a(p^{\nu})|\geq p^{\nu/2}$.
Der Logarithmus des p-ten Euler-Faktors ist $\log\left(1+\sum_{m=1}^{\nu}\frac{a(p^m)}{p^{ms}}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b(p^k)}{p^{ks}}$.
Also Potenzreihe in $X=p^{-s}$ geschrieben:
$$\log P(X)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k X^k,\ \text{die } B_k=b(p^k).$$

Zerl. in Linearfaktoren

Da $a(1)=1$, folgt $P(X)=1+\sum_{m=1}^{\nu}a(p^m)X^m=\prod_{j=1}^{\nu}(1-C_jX)$, $B_k=-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{\nu}C_j^k$.

Nun ist $\prod_{j=1}^{\nu}|C_j|=|a(p^{\nu})|\geq p^{\nu/2}$, der maximale Wert der $|C_j|$ ist also $\geq p^{1/2}$.

Wir haben $\lim_{k\to\infty}|b(p^k)|^{1/k}=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{\nu}C_j^k\right|^{1/k}=\max_{1\leq j\leq\nu}|C_j|\geq p^{1/2}$,

im $\not\!\!\downarrow$ zur Bed. $b(p^k)\ll p^{k\theta}$ für ein $\theta<\frac{1}{2}$ im Euler-Π-Axiom.
Also folgt $q=1$ und $\mathcal{L}(s)\equiv 1$. □

Bekannt:

- $\mathcal{L}\in\mathcal{S}$ mit $d_{\mathcal{L}}=1 \Rightarrow \mathcal{L}=\zeta$ oder $\mathcal{L}(s)=L(s+i\theta,\chi)$ zu primitiven χ, wo $\theta\in\mathbb{R}$.
  Für höhere Grade gibt es bislang keine solche Klassifikation.
- Bsp. für $d_{\mathcal{L}}=2$: normalisierte L-Funktionen zu holomorphen Neuformen
  solche zu nicht-holom.: Ramanujan-Hypothese bislang nicht verifiziert
- Die Rankin-Selberg-L-Fkt. zu 2 holom. Neuformen sind in $\mathcal{S}$ vom Grad 4
- Weitere Bsp.: Dedekind Zeta-Fkt. zu Zk $K|\mathbb{Q} \Rightarrow$ Grad der L-Fkt. ist $[K:\mathbb{Q}]$.

Bem.:

nicht: Dedekindsche eta-Fkt., vgl. wikipedia

- Die alternierende ζ-Fkt., auch Dirichletsche η-Fkt. genannt, ist durch die L-Reihe $\eta(s):=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ definiert.
  Bei dieser Fkt. ist $\sigma_0=0$, $\bar{\sigma}=1$.
  Weiter gilt $\eta(s)=(1-2^{1-s})\cdot\zeta(s)$ für $\sigma>1$.
  Die Funktion $\eta(s)$ erfüllt <u>nicht</u> die RH, da sie auf $\sigma=1$ die ∞ vielen Nullstellen $s=1-\frac{2\pi i}{\log 2}\cdot k$, $k\in\mathbb{Z}$, besitzt.
- Fälschlicherweise wird diese Funktion in der Literatur oft als Bsp. angegeben, dass alle Axiome $\boxed{1.}$-$\boxed{4.}$ erfüllt sind außer $\boxed{4.}$, wo $\theta=\frac{1}{2}$ statt $\theta<\frac{1}{2}$ wäre.
  Das stimmt so nicht: Richtig ist, dass $\boxed{1.}$ & $\boxed{2.}$ gelten, aber $\boxed{3.}$ gilt so schon nicht mehr. Und $\boxed{4.}$ ist mit $\theta=1$ erfüllt, denn wir haben das Euler-produkt $\eta(s)=(1-2^{1-s})\cdot(1-\frac{1}{2^s})^{-1}\cdot\prod_{p>2}(1-\frac{1}{p^s})^{-1}$, also ist hier

$$\mathcal{L}_2(s)=\frac{1-2^{1-s}}{1-2^{-s}} \Rightarrow \log\mathcal{L}_2(s)=\log(1-2^{1-s})-\log(1-2^{-s})=-\sum_k\frac{1}{k}\cdot 2^{(1-s)k}+\sum_k\frac{1}{k}\cdot 2^{-sk}$$
$$=\sum_{k\geq 1}\underbrace{\frac{1}{k}\cdot(1-2^k)}_{b(2^k)\ll\frac{2^k}{k}}\cdot 2^{-sk}, \text{ also ist } \theta=1.$$

- Bessere Beispiele, die zeigen, dass L-Funktionen mit $\theta>\frac{1}{2}$ die R.V. nicht erfüllen müssen, auch wenn für sie sonst $\boxed{1.}$-$\boxed{4.}$ gelten, sind:
  $g(s):=(1-2^{\alpha-s})\cdot(1-2^{\beta-s})$, wobei $\alpha+\beta=1$. $\to$ in $\boxed{3.}$: $Q=2$, $f=0$: $g(s)=2^{1-2s}\cdot g(1-s)$
  Dann: $\log\mathcal{L}_2(s)=-\sum\frac{1}{k}\cdot(2^{(\alpha-s)k}+2^{(\beta-s)k})=-\sum\frac{1}{k}\cdot 2^{-sk}\cdot(2^{\alpha k}+2^{\beta k})$, also $b(2^k)<\frac{1}{k}\cdot 2^{\max(\alpha,\beta)\cdot k}$,
  für $\alpha\in]\frac{1}{2},1[$ folgt also $b(2^k)\ll\frac{1}{k}\cdot 2^{\alpha k}$, d.h. $\theta=\alpha>\frac{1}{2}$.
  Die RH ist verletzt, weil $s=\alpha+\frac{2\pi i}{\log 2}\cdot l$, $l\in\mathbb{Z}$, nicht-triv. Nst. von g mit $\sigma>\frac{1}{2}$ sind.