Die Selberg-Klasse

(2-std. Spezialvorlesung im SoSe 2013)

§0. Vorbereitungen

Basics zu Dirichlet-Reihen / L-Funktionen (ohne Beweise)

Bem.: Schreiben komplexe Variablen $s\in\mathbb{C}$ stets als $s=\sigma+it \rightsquigarrow \sigma=\mathrm{Re}\,s$, $t=\mathrm{Im}\,s$.

Def.: Eine Fkt. $f: B\to\mathbb{C}$, $B\subseteq\mathbb{C}$, $f(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s}$ heißt die der Folge (a_n) zugeordnete Dirichlet-Reihe, die a_n heißen Koeffizienten.

Satz 0.1 (Kgz.abszisse/halbebene): Eine Dirichlet-Reihe f kgt. entweder nirgends oder für alle $s\in\mathbb{C}$ oder es ex. ein $\sigma_0\in\mathbb{R}$, so daß f auf der offenen Halbebene $H_{\sigma_0}:=\{\sigma+it \mid \sigma>\sigma_0,\ t\in\mathbb{R}\}$ konvergiert und für $s=\sigma+it$ mit $\sigma<\sigma_0$ divergiert. σ_0 heißt Kgz.abszisse, im 1. Fall setzt man $\sigma_0:=+\infty$, im 2. Fall $\sigma_0:=-\infty$.
Ebenso ex. auch eine absolute Kgz.abszisse $\bar{\sigma}$ für die absolute Kgz. von f.
Dann gilt der Zusammenhang $\sigma_0\leq\bar{\sigma}\leq\sigma_0+1$.
⌈Ist $\sum a_n n^{-s}$ bei s_1 kgt., folgt $\sum |a_n n^{-s_1-1-\varepsilon}| \leq B\cdot\sum n^{-1-\varepsilon}$ für ein $B>0$, also: abs. Kgz. bei $s_1+1+\varepsilon$⌋

Die Konvergenz auf dem Rand σ_0+it der Halbebene hängt stark von (a_n) ab (und umgekehrt). Analyt. Fortsetzung in $s=\sigma_0$ ist nicht möglich, wenn alle $a_n\geq 0$ (Landau).

Satz 0.2 (Dirichlet-Reihen und Faltung): Sind $f(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s}$ und $g(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{b_n}{n^s}$ abs. kgt. für $s\in\mathbb{C}$, so ist $h(s)=f(s)\cdot g(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{c_n}{n^s}$ mit $c=a*b$, d.h. $c_n=\sum_{d\mid n} a_d\, b_{n/d}$.
(Faltungsprodukt zahlentheoretischer Funktionen)

Bsp. $a=b=\mathbb{1}$: $c_n=\mathbb{1}*\mathbb{1}$ ist die Teileranzahlfkt. $c_n=d(n):=\sum_{d\mid n}1$.
Der Satz zeigt: $\sum_n \frac{d(n)}{n^s} = \left(\sum_n\frac{1}{n^s}\right)^2$.

Satz 0.3 (Identitätssatz für Dirichlet-Reihen): Seien $f(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s}$ und $g(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{b_n}{n^s}$ kgt. für $\sigma>\sigma_0$. Es gebe eine Folge $(s_m)=(\sigma_m+it_m)$ mit (i) $\sigma_m\xrightarrow{m\to\infty}\infty$, (ii) $\forall m: f(s_m)=g(s_m)$.
Dann gilt $\forall n: a_n=b_n$, also $f=g$.

Bem.: s. S. -5-

holomorph/analytisch = in Potenzreihe entwickelbar
(bis auf Pole analytisch)

Bem.: Dirichlet-Reihen und ihre meromorphen Fortsetzungen jenseits ihrer Konvergenzhalbebene werden mit L bezeichnet $\rightsquigarrow$ L-Reihen / L-Funktion.

<u>Satz 0.4 (Titchmarsh, Thm. 7.1)</u>: Jede konvergente Dirichlet-Reihe L hat eine Halbebene, auf der das Quadratmittel $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|L(\sigma+it)|^2dt$ beschränkt ist, genau: $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|L(\sigma+it)|^2dt = \sum_{n\geq 1}|a_n|^2 n^{-2\sigma}$ für $\sigma > \bar{\sigma}$.

<u>Beispiele:</u> • "Einfachstes" Bsp.: $\zeta(s) := \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ für $s=\sigma+it$ mit $\sigma>1$, die (Riemannsche) Zeta-Fkt.

• Dirichletsche L-Reihen: $L(s,\chi) := \sum_{n\geq 1}\frac{\chi(n)}{n^s}$ zu einem Zahlcharakter / Dirichletcharakter $\chi: \mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ mod $k\in\mathbb{N}$ mit (i) $\forall (n,k)=1: |\chi(n)|=1$, $\forall (n,k)>1: \chi(n)=0$,
(ii) χ ist vollst. multiplikativ, d.h. $\forall n,m\in\mathbb{Z}: \chi(nm)=\chi(n)\chi(m)$,
(iii) χ ist k-periodisch, d.h. $\forall n\in\mathbb{Z}: \chi(n+k)=\chi(n)$.
Der Charakter $\chi_0(n) := \begin{cases}1, & (n,k)=1\\ 0, & (n,k)>1\end{cases}$ heißt Hauptcharakter mod k.

• Automorphe L-Fkt.: Zu einer automorphen Form f, Fourierentw. $f(z)=\sum_{n\geq 0}a(n)\exp(2\pi i n z)$, wird $L(s,f) := \sum_{n\geq 1}\frac{a(n)}{n^s}$ gesetzt.

• Modulform: Ist holomorphe Fkt. $f: \mathbb{H}\to\mathbb{C}$, $\mathbb{H} := \{z\in\mathbb{C};\ \operatorname{Im} z>0\}$, falls $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$ für ein $k\in\mathbb{N}$ und alle $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$ gilt.
Für $N\in\mathbb{N}$ wird def.: $\Gamma_0(N) := \{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in \underbrace{SL_2(\mathbb{Z})}_{\text{d.h. }\det=1};\ c\equiv 0\,(N)\}$
$\rightsquigarrow$ f heißt Modulform von Gewicht k für $\Gamma_0(N)$,
automorphe Formen sind Verallg. dieser klassischen Modulformen.

• Dedekind Zeta-Fkt.: Für Zahlkörper (kurz: "ZK") K (= endl. alg. Erw. von $\mathbb{Q}$) wird $\zeta_K(s) := \sum_{\mathfrak{a}} N(\mathfrak{a})^{-s}$ gesetzt, wobei $\mathfrak{a}$ alle ganzen Ideale von K durchlaufen und $N(\mathfrak{a}) := \#(A/\mathfrak{a})\in\mathbb{N}$ die Norm bezeichnet, A der $\underbrace{\text{ZR}}_{\text{Zahlring}}$ von K

Schon die Untersuchung von ζ ist interessant, da sie viele Eigenschaften hat, die mit der Theorie der Primzahlen zusammenhängen.
Die wichtigsten Eigenschaften:

• ζ ist meromorph fortsetzbar auf ganz $\mathbb{C}$, einziger Pol bei $s=1$ vom Residuum 1, die Fortsetzung gelingt mit der Formel
$$\zeta(s) = 1+\frac{1}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}dx \text{ für } \sigma>0,\ s\neq 1, \text{ und der}$$
• Funktionalgleichung: $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$,
Γ die Γ-Fkt., s.u. $\rightsquigarrow$ triviale ζ-Nst. bei $\{-2n \mid n\in\mathbb{N}\}$, nichttriviale: $0<\sigma<1$ (s mit).
Für die Nst. von ζ schreiben wir $\varrho = \beta+i\gamma$.

- <u>Euler-Produkt</u>: $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$ für $\sigma > 1$, $\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N};\ p \text{ prim}\}$.

- <u>Riemann-von Mangoldt-Formel</u> für ζ: Für $N(T) := \#\{\rho = \beta + i\gamma \in \mathbb{C};\ \zeta(\rho) = 0,\ 0 \le \gamma \le T\}$ (mit Multipl. gezählt) gilt: $N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi e} + O(\log T)$.

- <u>Primzahlsatz ("PZS")</u>: $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \iff \frac{\pi(x)}{x/\log x} \xrightarrow{x \to \infty} 1$ ist herleitbar aus $\zeta(1+it) \neq 0$ für $t \neq 0$, wobei präzisere Versionen des PZS mit nullstellenfreien Gebieten nahe $\{1+it \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ erreicht werden können. Dies gelingt in der Form $\pi(x) \sim li(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$, wobei sich hier eine gute Abschätzung für das Restglied als wesentlich in Anwendungen herausstellt.

Hilfsmittel aus der Funktionentheorie:

- <u>Peronsche Formel</u>: Seien $c, y, T > 0$, $I(y,T) := \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds$, $\delta(y) := \begin{cases} 0, & 0<y<1, \\ 1/2, & y = 1, \\ 1, & y > 1. \end{cases}$

  Dann ist $|I(y,T) - \delta(y)| < \begin{cases} y^c \min\left\{1, \frac{1}{T \cdot |\log y|}\right\}, & y \neq 1, \\ c/T, & y = 1. \end{cases}$

  Es folgt: $I(y,\infty) = \lim_{T \to \infty} I(y,T) = \delta(y)$.

<u>Wichtigste Anwendung</u>: Für $x \notin \mathbb{Z}$, $c > 1$, ist $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{n \ge 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \cdot \frac{x^s}{s} ds = \sum_{n \ge 1} \Lambda(n) \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{x^s}{s} ds$
$= 2\pi i \underbrace{\sum_{n \le x} \Lambda(n)}_{=: \psi(x)}$,

wobei $\Lambda(n) := \begin{cases} \log p, & \text{falls } n = p^k \text{ mit } p \in \mathbb{P}, k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$

die <u>von-Mangoldt-Fkt.</u> ist. Für diese gilt:
1.) $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n \ge 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$, 2.) $\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) \sim x$ ist äquivalent zum PZS.

Es folgt: $\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) \cdot \frac{x^s}{s} ds$, auch <u>Peronsche Formel</u> genannt.
Analog für beliebige D-Reihen: $x \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n \le x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s) \frac{x^s}{s} ds$, falls $f(s) = \sum_{n \ge 1} \frac{a_n}{n^s}$, $c > \bar{\sigma}$.

- <u>Phragmen-Lindelöf-Prinzip</u>: Sei $f(s)$ analytisch im Streifen $\sigma_1 \le \sigma \le \sigma_2$ mit $f(s) \ll \exp(\varepsilon |t|)$. Ist $f(\sigma_1 + it) \ll |t|^{c_1}$ und $f(\sigma_2 + it) \ll |t|^{c_2}$, dann gilt $f(s) \ll |t|^{c(\sigma)}$ gleichmäßig in $\sigma_1 \le \sigma \le \sigma_2$, wobei $c(\sigma)$ linear ist mit $c(\sigma_1) = c_1$ und $c(\sigma_2) = c_2$.
  $\ulcorner\ c(\sigma) = \frac{c_2 - c_1}{\sigma_2 - \sigma_1}(\sigma - \sigma_1) + c_1\ \lrcorner$

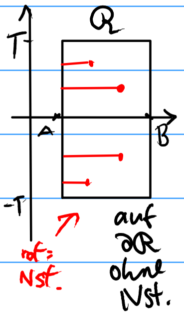
$f \ll g :\iff f = O(g) \iff \exists C > 0\ \forall x: |f(x)| \le C \cdot g(x)$

f auf $I \subseteq \mathbb{R}$ konvex: $\Leftrightarrow \forall x \in I,\ x \pm h \in I:$ $f(x) \le \frac{1}{2}\left(f(x+h) + f(x-h)\right)$

- Jensensche Ungl.: (reelle Analysis) Für eine konvexe Fkt. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\lambda_i \ge 0$ mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ gilt:
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i), \text{ bzw. } f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)\,dx\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(y(x))\,dx,$$
$y: [a,b] \to \mathbb{R}$

- Jensensche Formel: Sei $f(s)$ analytisch für $|s| \le r$ mit Nst. $\rho_1, \dots, \rho_m$ (gemäß ihrer Vielfachheiten) in $|s| < r$, sei $f(s) \neq 0$ für $|s| = r$ und $f(0) \neq 0$.
Dann gilt $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(r\exp(i\theta))|\,d\theta = \log \frac{r^m |f(0)|}{|\rho_1 \cdots \rho_m|}.$$
Auch in der Form: $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log(f(r\exp(i\theta)))|\,d\theta - \log|f(0)| = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt,$$
$n(t) = \#$ Nst. von f im Kreis um 0 vom Radius r

- Littlewoods Lemma (Titchmarsh §9.9):



Sei $A < B$, sei $f(s)$ analytisch auf dem Rechteck $R := \{s \in \mathbb{C};\ A \le \sigma \le B,\ |t| \le T\}$.
Die Fkt. $f(s)$ verschwinde nicht auf dem Rand von R.
Sei R' gleich R ohne der Vereinigung der horizontalen Schnitte von den Nullstellen von f in R zum linken Rand von R, und wähle einen einfachwertigen Zweig von $\log f(s)$ im Innern von R'. Sei $\nu(\sigma, T)$ die Anzahl der Nst. $\rho = \beta + i\gamma$ von $f(s)$ innerhalb des Rechtecks mit $\beta > \sigma$.
Dann gilt: $$\int_{\partial R} \log f(s)\,ds = -2\pi i \int_A^B \nu(\sigma, T)\,d T.$$
∂R in pos. Richtung umlaufen

Sonstige Hilfsmittel:

Gamma-Funktion: $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$ für $x > 0$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}$.
Erfüllt: $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ für $x \in \mathbb{C} \setminus P$, meromorph fortsetzbar auf $\mathbb{C}$, hat keine Nst., Pole bei $\{-n \mid n \in \mathbb{N}_0\} =: P$.

Stirlingsche Formel: $$\log \Gamma(z) = \left(z - \tfrac{1}{2}\right)\log z - z + \tfrac{1}{2}\log 2\pi + \int_0^\infty \frac{\lfloor u \rfloor - u - \frac{1}{2}}{u+z}\,du$$
$$= \left(z - \tfrac{1}{2}\right)\log z - z + \tfrac{1}{2}\log 2\pi + O(|z|^{-1}),$$
glm. in z mit $-\pi + \varepsilon \le \arg z \le \pi - \varepsilon$.

Somit: $\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}\cdot z^{z-1/2} e^{-z} e^{\mu(z)}$ mit $\mu(z) = O(|z|^{-1})$,
also: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

$$\left[\ \sqrt{2\pi}\,(n+1)^{n+1/2} e^{-n-1} = \sqrt{2\pi}\cdot n^{n+\frac{1}{2}}\cdot \overbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}^{\sim e} e^{-n-1}\ \right]$$

Bemerkung zum obigen Identitätssatz für Dirichlet-Reihen, dieser kann auch in folgender Variante formuliert & bewiesen werden:

<u>Vor.:</u> Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und nicht diskret, $f(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ sei eine D-Reihe mit $f(s) = 0$ für alle $s \in K$.

<u>Beh.:</u> Dann sind alle $a_n = 0$.

<u>Bew.:</u> Sei $\sigma_0 := \min\{\operatorname{Re} s;\ s \in K\}$, haben auf dem Kompaktum $K \subseteq \{\sigma > \sigma_0\}$ glm. Kgz. der D-Reihe, dort stellt diese eine holomorphe Fkt. dar.
Nach dem Id.satz für holom. Fktn. (bei Fischer-Lieb §5, Satz 5.5) folgt, da K nicht diskret, daß dann $f \equiv 0$ ist.
Nach obigem Id.satz für D-Reihen folgt, daß dann alle $a_n = 0$ sind. □

Dazu noch die <u>Def.:</u> $A \subseteq G$ <u>diskret</u> $:\Leftrightarrow \forall z_0 \in G\ \exists$ Umg. $U(z_0)$: $\#(U(z_0) \cap A) < \infty$.

Als Erinnerung/Zusatz noch der Beweis des Id.satzes für D-Reihen als Nachtrag:

- Sei $h(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{c_n}{n^s}$ mit $c_n := a_n - b_n$, z.z.: alle $c_n = 0$.
  OE seien alle $\sigma_m > 1$, und nach ev. Verschieben sei OE h bei $s = 0$ abs. kgt.
  Daher sind die c_n beschr., sei etwa $B > 0$ mit $|c_n| \leq B$ für alle n.
- Sei n_0 minimal mit $c_{n_0} \neq 0$. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$0 < \frac{|c_{n_0}|}{n_0^{\sigma_m}} \underset{h(s_m)=0}{\uparrow}{=} \Big|\sum_{n > n_0} \frac{c_n}{n^{s_m}}\Big| \leq \sum_{n > n_0} |c_n| n^{-\sigma_m} \leq B \cdot \sum_{n > n_0} n^{-\sigma_m} < B \cdot \int_{n_0}^{\infty} t^{-\sigma_m} dt$$

$$= B \cdot \frac{n_0^{1-\sigma_m}}{\sigma_m - 1}, \text{ also } \underbrace{\sigma_m - 1}_{\xrightarrow[m\to\infty]{} \infty} \leq n_0 \cdot |c_{n_0}|^{-1} \cdot B,$$

was für $m \to \infty$ einen ↯ ergibt. □