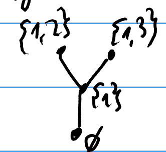
Zusatz: Satz: Jeder Vektorraum hat eine Basis.
Führen Beweis mit Auswahlaxiom in der Form des Zornschen Lemmas.

Motivation zum Beweis des Satzes: Fangen mit irgendeiner lin. unabh. Menge S an, etwa $S=\emptyset$. Ist S nicht maximal, ersetze S durch eine lin. unabh. Obermenge, solange bis S maximal ist. Versuch per Induktion: Beginne mit S_0, konstruiere $S_0 \subsetneq S_1 \subsetneq S_2 \subsetneq \ldots$ Setze $S_0' := \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} S_i$, ist S_0' maximal, fertig, sonst $S_0' \subsetneq S_1' \subsetneq S_2' \subsetneq \ldots$ Setze $S_0'' := \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} S_i'$, weiter S_0''' usw. Problem: Wird man so je fertig?

Bsp.:



halbgeordnet mit $\subseteq$

Def.: 1. Eine Halbordnung auf einer Menge M ist eine Relation $\leq$, die reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist (zwei bel. Elemente müssen nicht vergleichbar sein)
2. Ist M halbgeordnet, so ist ein Maximum ein El. $m\in M$, für das es kein $x\in M$ gibt mit $x\geq m$ und $x\neq m$.
3. Eine Teilmenge $T\subseteq M$ heißt Kette, falls die Halbordnungsrel. $\leq$ von M auf T eine ("totale") Ordnung liefert.

Zorns Lemma: Sei M eine Menge mit Halbordnung $\leq$ so, dass es für jede Kette $T\subseteq M$ ein $x\in M$ gibt mit $x\geq y$ für alle $y\in T$. Dann gibt es in der Menge M ein Maximum.

Bem.:
- Das Zornsche Lemma liefert nur die Existenz eines Maximums, und gibt keinerlei Hinweis darauf, wie man es konstruieren/berechnen könnte. Beweis damit sind dann reine Existenzbeweise.
- Das Zornsche Lemma läßt sich aus dem Auswahlaxiom herleiten, das eine der Grundannahmen der Mathematik ist und nicht weiter hinterfragt wird/bewiesen werden kann. Das Auswahlaxiom besagt:
Sei $X\neq\emptyset$ eine Menge, $P:=\{A\subseteq X;\ A\neq 0\}$. Dann gibt es eine Auswahlfunktion $c: P\to X,\ A\mapsto c(A)\in A$ (ohne Konstruktionsangabe)

Zum Beweis des Satzes:

Bereits gezeigt: $S \subseteq V$ ist Basis $\Leftrightarrow$ S ist maximale lin. unabh. Teilmenge von V, d.h. S ist lin. unabh. und jede Obermenge von S ist lin. abh.

Sei M die Menge der lin. unabh. Teilmengen von V, mit der Halbordnung $\subseteq$. Das Zornsche Lemma liefert die Existenz einer maximalen lin. unabh. Teilmenge von M, also eine Basis, sofern die Voraussetzungen erfüllt sind, welche wir nur noch zu überprüfen brauchen:

Es bleibt z.z.: Ist $T \subseteq M$ (total) geordnet bzgl. $\subseteq$, d.h. eine Kette in M, so gibt es eine lin. unabh. Teilmenge $S \subseteq V$ mit $S' \subseteq S$ für alle $S' \in T$.

Wähle $S := \bigcup_{S' \in T} S'$, dann gilt $S' \subseteq S$ für alle $S' \in T$.

Es bleibt z.z.: S ist lin. unabh.

Dazu seien $v_1, \dots, v_n \in S$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ geg. mit $\lambda v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$.
Jedes v_i liegt in einem $S_i \in T$. Da T Kette ist, gilt nach Umnumerierung $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots \subseteq S_n$, also sind $v_1, \dots, v_n \in S_n$.
Da S_n lin. unabh. ist, folgt aus $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ bereits, dass alle $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ sind.
Also ist S lin. unabh. $\square$

Weil Auswahlaxiom / Zornsches Lemma nur die Existenz von etwas geben können, kann man i.A. auch keine Konstruktionsvorschrift von Basen in beliebigen (unendlichdimensionalen) Vektorräumen angeben.