22.1.14

# Repetitorium WiSe 2013/14

Lineare Algebra Teil:

## Stichworte:

Affine Räume, Quadriken im $\mathbb{R}^n$
affine Unterräume, affine Basen, Kegelschnitte, Normalformen und Klassifikation von Quadriken: echte, ausgeartete und degenerierte Quadriken

### (a) Affine Räume, affine Unterräume, affine Basen

**Def.:** Ein affiner Raum über einem Körper $K$ ist ein Tripel $(A, V_A, v)$, wo
- $A$ eine Menge ist (die Elemente von $A$ werden Punkte genannt),
- $V_A$ ein Vektorraum über $K$,
- $v$ eine Abb. $v: A \times A \to V_A$ so dass gilt:

  (1) $\forall P \in A \; \forall x \in V_A \; \exists! \, Q \in A: \; x = \overrightarrow{PQ}$ (schreiben auch $Q = P + x$)

  und (2) $\forall P, Q, R \in A: \; \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

Man nennt $v(P,Q) = \overrightarrow{PQ}$ den Verbindungsvektor von $P$ und $Q$.

**Anschaulich:** In der Geometrie gibt es oft keinen Ursprung und keine Koordinatenachsen, die von Anfang an ausgezeichnet sind; vielmehr passt man diese den geometrischen Problemen an. Affine Räume werden diesen gerecht.

**Def.:** Ein affiner Unterraum ist eine Menge $U \subseteq A$ mit
$$U = \{Q \in A \mid \overrightarrow{PQ} \in W\} = \{P + x \mid x \in W\} = P + W$$
für einen Untervektorraum $W$ von $V_A$ und ein $P \in A$.
Dann: $\dim U := \dim_K W$. Schreiben auch $V_U$ für $W$.

**Def.:** Sind $P_0, \ldots, P_n \in A$ Punkte des affinen Raums $A$,
so heißt $B_a = (P_0, \ldots, P_n)$ eine affine Basis von $A$,
falls $B = (\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n})$ linear unabhängig und $V_A$ ist.
Eine affine Basis heißt auch affines Koordinatensystem.

**Def.:** Seien $(A, V_A, v_A)$ und $(B, V_B, v_B)$ affine Räume.

- Eine Abbildung $f: A \to B$ heißt affine Abbildung, falls es eine lineare Abbildung $\hat{f}: V_A \to V_B$ gibt mit $\hat{f}(v_A(P,Q)) = v_B(f(P), f(Q))$ für alle $P, Q \in A$.
  Kurz: $\hat{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f_P f_Q}$; schreiben auch $f_P$ für $f(P)$
- Eine affine Abbildung heißt Affinität, wenn sie bijektiv ist.
- Eine Translation ist eine affine Abbildung der Form $f_P = P + x_0$ mit $x_0 \in A_A$,
  anschaulich: Verschiebung um $x_0$
- Eine Isometrie ist eine affine Abbildung $f$ mit $\|\overrightarrow{f_P f_Q}\| = \|\overrightarrow{PQ}\|$ für alle $P, Q \in A$.
- Eine Ähnlichkeit " " " " $\|\overrightarrow{f_P f_Q}\| = \underbrace{c}_{\text{"Streckungsfaktor"}} \cdot \|\overrightarrow{PQ}\|$ ", ein $c > 0$.

**Bem.:**
- Eine affine Abbildung erhält Parallelität, Teilverhältnis und Kollinearität.
- Jede affine Abb. $f: K^n \to K^m$ lässt sich darstellen als
  $f(P) = P_0 + A \cdot P$ für ein $P_0 \in K^m$ und ein $A \in K^{m \times n}$.

## (e) Quadriken im $\mathbb{R}^n$

**Def.:** Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$, so heißt

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n;\ x^T A x + b^T x + c = 0\}$$ eine Quadrik im $\mathbb{R}^n$.

In der Quadrikengl. heißt

$x^T A x = \langle x, Ax \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i \neq j} 2 a_{ij} x_i x_j$ quadratische Form von $Q$,

$b^T x = \langle b, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$ Linearform von $Q$,

$c$ die Konstante von $Q$.

**Bem.:**
- Quadrik im affinen Raum $A$: $Q = \{P \in A;\ \overrightarrow{OP} = x,\ \overbrace{b(x,x)}^{\text{symm. Bilinearform} \neq 0} + 2\overbrace{\Phi(x)}^{\text{Linearform } V \to \mathbb{R}} + c = 0\}$
- Der Zusammenhang mit Affinitäten besteht in folgendem Satz:
  Sei $Q \subseteq A$ Quadrik, $f: A \to A$ Affinität. Dann ist $f(Q)$ eine Quadrik.
  $\rightsquigarrow$ Mittels Affinitäten möchte man die Quadrikengl. auf einfache Gestalt bringen können und diese dann klassifizieren. Ergebnis:

**Normalformensatz für Quadriken:** Geg. eine Quadrik $Q \subseteq \mathbb{R}^m$.
Dann gibt es eine affine Koordinatentrafo $x = T \cdot u + F$ [="Hauptachsentrafo"]
wo $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ orthogonale Matrix und
so dass die Quadrikengl. auf folgende Normalform reduziert wird:

Typ (a): $\frac{u_1^2}{A_1^2} + \dots + \frac{u_k^2}{A_k^2} - \frac{u_{k+1}^2}{A_{k+1}^2} - \dots - \frac{u_m^2}{A_m^2} = 0$,

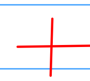
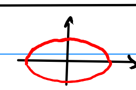
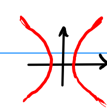
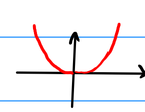
Typ (b): $\frac{u_1^2}{A_1^2} + \dots + \frac{u_k^2}{A_k^2} - \frac{u_{k+1}^2}{A_{k+1}^2} - \dots - \frac{u_m^2}{A_m^2} - 1 = 0$

Typ (c): $\frac{u_1^2}{A_1^2} + \dots + \frac{u_k^2}{A_k^2} - \frac{u_{k+1}^2}{A_{k+1}^2} - \dots - \frac{u_m^2}{A_m^2} + 2u_{m+1} = 0$

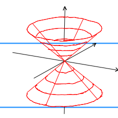
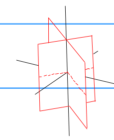
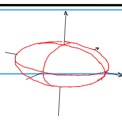
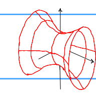
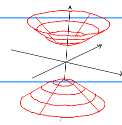
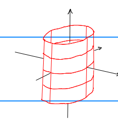
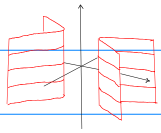
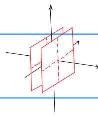
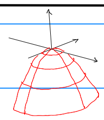
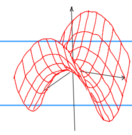
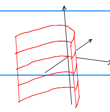
mit positiven reellen Zahlen $A_1, \dots, A_m$.

$\rightsquigarrow$ Klassifikation der Kegelschnitte (= Quadriken im $\mathbb{R}^2$; erhältlich als {Schnitt Kegel mit Ebene im $\mathbb{R}^3$})
und der Flächen 2. Ordnung (= Quadriken im $\mathbb{R}^3$):

**Kegelschnitte:** Quadrikengl. lautet $\overbrace{a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2}^{= b(x,x) \rightsquigarrow \text{bestimmt den Typ}} + b_1x_1 + b_2x_2 + c = 0$

| Form | Gleichung | Typ | Bild |
|---|---|---|---|
| (a) | $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 0$ | Punkt | |
| | $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 0$ | zwei sich schneidende Geraden |  |
| | $x^2 = 0$ | Gerade |  |
| (b) | $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ | Ellipse |  |
| | $-\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$ | leere Menge | |
| | $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$ | Hyperbel |  |
| | $\frac{x^2}{A^2} = 1$ | zwei parallele Geraden |  |
| (c) | $-\frac{x^2}{A^2} = 1$ | leere Menge | |
| | $\frac{x^2}{A^2} + 2y = 0$ | Parabel |  |

**Flächen 2. Ordnung:** Es gibt 11 Klassen, die keine Punkte/Geraden/Ebenen sind:

| Form | Gleichung | Typ | Bild |
|---|---|---|---|
| (a) | $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{z^2}{C^2}=0$ | Kegel |  |
| | $\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=0$ | Paar sich schneidender Ebenen |  |
| (b) | $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=1$ | Ellipsoid, Sphäre für $A=B=C=1$ |  |
| | $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{z^2}{C^2}=1$ | einschaliges Hyperboloid |  |
| | $\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}-\frac{z^2}{C^2}=1$ | zweischaliges Hyperboloid |  |
| | $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$ | elliptischer Zylinder |  |
| | $\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=1$ | hyperbolischer Zylinder |  |
| | $\frac{x^2}{A^2}=1$ | Paar paralleler Ebenen |  |
| (c) | $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=2z$ | elliptisches Paraboloid |  |
| | $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=2z$ | hyperbolisches Paraboloid |  |
| | $\frac{x^2}{A^2}=2z$ | parabolischer Zylinder |  |

**Rechenbeispiel:**

im $\mathbb{R}^3$ sei $Q$ geg. durch: $8x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+5x_2^2-8x_2x_3+5x_3^2$
$+\underline{54x_1}+\underline{\underline{72}}=0$

Wollen Normalform/Typ von $Q$ bestimmen.

Gehen vor wie folgt.

Glg. in Matrixschreibweise: $x^T A x + 2 b^T x + c = 0$

mit
$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 27 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = 72.$$

1. Berechne charakteristisches Polynom: $\chi_A = -x(9-x)^2$,
   die EWe sind $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 0$
2. In den Eigenräumen $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_3}$ bestimmen wir jeweils eine ONB.
   Für $E_{\lambda_1}$ bilden die Vektoren $v = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\tilde{v} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine ONB,
   in $E_{\lambda_3}$ der Vektor $w = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine ONB.
3. Dann ist $S = (v|\tilde{v}|w) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ eine orthogonale Matrix,
   die A auf Diagonalgestalt transformiert (die "Hauptachsentransformation"),
   diese Transformation beseitigt die gemischten quadratischen Terme:
   In den neuen Koordinaten $y_1, y_2, y_3$, die mit den alten $x_1, x_2, x_3$
   durch $x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3$, $x_2 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$, $x_3 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$
   verbunden ist, hat Q somit die Glg. $9(y_1^2 + y_2^2 + 4y_1 + 4y_2 - 2y_3 + 8) = 0$.
4. Mit Hilfe der Translation $z_1 = y_1 + 2$, $z_2 = y_2 + 2$, $z_3 = y_3$,
   welche den konstanten Term beseitigt,
   erhalten wir die Normalform von Q als $z_1^2 + z_2^2 = 2z_3$.
   Q ist also ein <u>elliptisches Paraboloid</u>.

<u>Bem.</u>: Die Art der Bilinearform b der Quadrik bestimmt den Typ:
- b positiv definit ⇝ Q Ellipsoid oder Punkt
- b indefinit und nichtausgeartet ⇝ Kegel oder (ein-/zweischaliges) Hyperboloid
- b indefinit und ausgeartet ⇝ hyperbolisches Paraboloid
- b positiv semidefinit ⇝ elliptisches Paraboloid