22.1.14

Repetitorium WiSe 2013/14

Analysis-Teil:

Stichworte:

(a) Lokale Extrema: Extremwerte in mehreren Variablen, Kriterien, Extrema mit Nebenbedingungen

(b) impliziter Funktionensatz und lokale Umkehrbarkeit: implizites Differenzieren, lokale und globale Umkehrbarkeit, Diffeomorphismen, Beweisidee für den impliziten Funktionensatz

(a) Lokale Extrema

Vor.: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff'bar.

Def.:
- f hat in $a \in U$ ein lokales Extremum, falls f in a ein lokales Minimum oder Maximum hat.
- f hat in $a \in U$ ein lokales Minimum {Maximum}, falls eine Umgebung V von a ex. mit $V \subseteq U$ und $f(x) \geq f(a)$ $\{f(x) \leq f(a)\}$ für alle $x \in V$.

Bem.: gilt hier $>$ bzw. $<$ für alle $x \in V \setminus \{a\}$, spricht man von einem strikten Extremum. "global" gilt, wenn $V = U$ genommen werden kann.

Notwendiges Kriterium:
- f hat in a lokales Extremum $\Rightarrow \operatorname{grad} f(a) = 0$, d.h. a ist kritische Stelle

Hinreichendes Kriterium: wird mit der (nach Schwarz symmetrischen) Hessematrix $\operatorname{Hess} f(a) := (D_i D_j f(a))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ formuliert:
- a kritische Stelle, $\operatorname{Hess} f(a)$ positiv definit (vgl. Termin_11_LA z.B. Hurwitz-Krit.) $\Rightarrow f$ hat in a striktes Minimum
- a kritische Stelle, $\operatorname{Hess} f(a)$ negativ definit (" ...) $\Rightarrow f$ hat in a striktes Maximum

Bem.: Semidefinit reicht nicht! Bsp.: $f(x,y) = y^2 + x^4 + x^3 \rightsquigarrow \operatorname{Hess} f(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ pos. semidef.,
Kein Extremum in 0: $f(x,0) = x^3(x+1) \begin{cases} < 0 = f(0), & -1 < x < 0 \\ > 0 = f(0), & x > 0 \end{cases}$

Notwendiges Kriterium mit Hess $f(a)$: Ist f auf $U \subset \mathbb{R}^n$ zweimal st. db. und $a \in U$ Extremstelle von f, dann ist Hess $f(a)$ semidefinit $\begin{pmatrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{pmatrix}$ semidefinit bei einem $\begin{Bmatrix}\text{Minimum}\\\text{Maximum}\end{Bmatrix}$)

Ausschluß von Extrema: ist f auf $U \subset \mathbb{R}^n$ zweimal st. dl., grad $f(a) = 0$, Hess $f(a)$ indefinit
$\Rightarrow f$ hat in a kein lok. Extr.

"Kompakt" hier wichtig

Eine Existenzaussage: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $f: U \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann hat f auf U ein globales Maximum und ein globales Minimum.

Praktisches Vorgehen: Als Extremstellen kommen die Punkte in Frage, die kritisch sind (d.h. grad verschwindet dort), die Randpunkte von U sind (falls U nicht offen) oder die singulär sind (wo f nicht diff'bar ist). Die kritischen Punkte ermittelt man durch Lösen des Gleichungssystems grad $f(x) = 0$, welches n Gleichungen in n Unbekannten hat. Dieses hat oft nur endl. viele Lösungen.
Der Vergleich der Funktionswerte dort reicht aber nicht aus, deshalb sind Kriterien nötig.
Dann Hessematrix berechnen und Kriterien testen. Hilft das nicht, müssen die Stellen anderweitig untersucht werden.

Extrema mit Nebenbedingungen:

Ausgangsproblem:
Geg. seien $f, g_1, \dots, g_r: U \to \mathbb{R}$ stetig db. mit $U \subset \mathbb{R}^n$ und $r < n$.

Def.: f hat ein lokales Extremum in $a \in U$ mit Nebenbedingungen $g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0$, falls $f_{/M}$ ein lokales Extremum in $a \in M$ hat, wobei $M := \{x \in U;\ g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$.

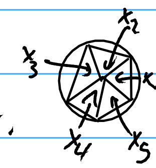
- f hat in a also ein lokales Maximum unter der NB $g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0$ laut Def., falls eine Umg. V von a ex. mit $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in V$ mit $g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0$ und $g_1(a) = \dots g_r(a) = 0$.
- Die Menge $\{x \in U;\ g(x) = 0\}$ heißt auch Nebenbedingungskurve.

Bestimmung der Extrema mit NBen mit der Lagrangeschen Multiplikatorenregel:
Falls $Dg(a)$ vollen Rang hat, d.h. Rang $Dg(a) = r$, dann gilt:
Hat f in a ein lokales Extremum unter den r NBen $g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0$, so gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ so, daß grad $f(a) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j$ grad $g_j(a) = 0$ gilt.

Die $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ heißen (Lagrangesche) Multiplikatoren.
Zusammen mit den r NBen ist die Glg. $\operatorname{grad} f(a) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \operatorname{grad} g_j(a) = 0$
ein (i.a. nichtlineares) Gleichungssystem
aus $n+r$ vielen Gleichungen für die r Multiplikatoren und n Koordinaten
$a_1,\dots,a_n$ der eigentlich interessierenden Extremstellen a.

1. **Beispiel:** Sei $n>2$, man bestimme das Maximum von $f(x)=\sin x_1+\dots+\sin x_n$ unter der NB $g(x):=x_1+\dots+x_n=2\pi$, $0\le x_j\le\pi$.

Bem.: $f(x)$ ist der doppelte Flächeninhalt des im Einheitskreis einbeschriebenen n-Eck mit den Zentriwinkeln $x_1,\dots,x_n$ unter der NB $x_1+\dots+x_n=2\pi$.



Der Bereich $\Delta:=\{x;\ g(x)=2\pi,\ 0\le x_j\le\pi\}$ ist kompakt,
weil f stetig ist, nimmt f dort sein Maximum an [nicht die Randpunkte].

Lagrange-Ansatz: nur Stellen $x=(x_1,\dots,x_n)$ kommen in Frage,
für die es einen Multiplikator $\lambda\in\mathbb{R}$ gibt mit
$$0=\operatorname{grad} f(x)+\lambda\operatorname{grad} g(x)=(\cos x_1,\dots,\cos x_n)+\lambda(1,\dots,1),$$
was nur für $\cos x_1=\dots=\cos x_n=0$ geht.
Mit $0\le x_j\le\pi$ folgt $x_1=\dots=x_n$, und aus der NB $g(x)=2\pi$ folgt $x_j=\frac{2\pi}{n}$, $j=1,\dots,n$.
Also ist der Flächeninhalt des einem Kreis einbeschriebenen n-Ecks
genau für das regelmäßige n-Eck maximal.

2. **Beispiel:** Sei $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, $q(x):=x^TAx$ die zugehörige quadr. Form.
Gesucht sind die Extrema von q auf der Einheitskugel $\{\|x\|=1\}\subseteq\mathbb{R}^n$, ist kompakt $\Rightarrow$ Extrema ex., da q stetig
↑ irgendeine Norm
$\to$ NB: $g(x):=\|x\|^2-1$.
Es ist $(\operatorname{grad} q(x))^T=2Ax$, $(\operatorname{grad} g(x))^T=2x$. Lagrange: $x\in\mathbb{R}^n$, für die $\lambda\in\mathbb{R}$ ex. mit
$$(\operatorname{grad} q(x))^T-\lambda(\operatorname{grad} g(x))^T=2Ax-2\lambda x=0 \text{ und } g(x)=\|x\|^2-1=0,$$
d.h. Eigenvektoren x von A der Länge 1 zum EW $\lambda=q(x)$. Also: $\begin{Bmatrix}\text{Max.}\\ \text{Min.}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\text{größter EW}\\ \text{kleinster EW}\end{Bmatrix}$.

Korollar: es ex. eine ONB aus EVen von A (und alle EWe sind reell), denn:
Es gibt nach eben Bewiesenem einen EV x_1 mit EW $\lambda_1\in\mathbb{R}$. Da $\langle x_1,Ax\rangle=\langle Ax_1,x\rangle=\lambda_1\langle x_1,x\rangle$,
führt die selbstadjungierte lin. Abb. $x\mapsto Ax$ das orthogonale Komplement von x_1 in sich über.
In diesem $(n-1)$-dim. Orthogonalraum von x_1 ex. wieder ein EV x_2 mit EW $\lambda_2\in\mathbb{R}$ usw.

(b) Impliziter Funktionensatz und lokale Umkehrbarkeit

Der implizite Funktionensatz in zwei Variablen:

z.B. $W = U \times V$, $U, V \subset \mathbb{R}^n$

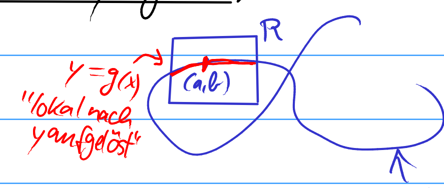
<u>Vor.:</u> Sei $F: W \to \mathbb{R}$, $W \subset \mathbb{R}^2$, F stetig diff'bar, $(a,b) \in W$ mit $\underline{F(a,b)=0}$
und $D_2 F(a,b) = \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

$U \supseteq (\alpha,\beta)$, $V \supseteq (\gamma,\delta)$

<u>Beh.:</u> Dann gibt es ein offenes Rechteck $R := (\alpha,\beta) \times (\gamma,\delta) \ni (a,b)$
und eine stetig differenzierbare Funktion $g: (\alpha,\beta) \to (\gamma,\delta)$, $g(a) = b$,
so dass für alle $(x,y) \in R$ gilt: $\left(\underline{F(x,y) = 0 \iff y = g(x)}\right)$.

d.h. $F(x,g(x))=0$ und $g(a)=b$

(Zusatz) $\underline{\text{Es gilt}}: g'(x) = -\dfrac{D_1 F(x,y)}{D_2 F(x,y)} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}$.
$\underline{\text{für alle } x \in R}$



<u>Bem.:</u> • "lösen $F(x,y)=0$ lokal nach y auf $\rightsquigarrow y = g(x)$, und berechne $g'(x)$"
• Allgemein ist $W = U \times V$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $F: U \times V \to \mathbb{R}^m$.
Der hier aufgeschriebene Spezialfall ist der mit $n = m = 1$. Die allgemeinere Vor. "$\underline{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \text{ inv'bar}}$" reduziert sich dann zu "$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$".

1. <u>Beispiel:</u> Betr. $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Für $\underline{y > 0}$ ist $y = \sqrt{1-x^2}$ die Funktion $y = y(x)$,
die durch $F(x,y) = 0$ "implizit" gegeben ist. (im Satz: schreiben $y = g(x)$, gilt "lokal")
Laut Satz ist ihre Abl. gleich $-\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (wo $y>0$ ist)
wir erhalten das Ergebnis direkt durch partielles Ableiten von F,
ohne die explizite Funktion $y = y(x)$ ableiten zu müssen!
Es gibt Beispiele, wo dies zu schwierig wäre.

2. <u>Beispiel:</u> Ist die Glg. $x^y = y^x$ in der Nähe von $a = (e,e)$ bzw. $a' = (2,4)$
nach einer der beiden Variablen auflösbar?

Def.: $f: \mathbb{R}^2_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^y - y^x$, ist für $x,y>0$ bel. oft diff'bar, $f(e,e) = f(2,4) = 0$ ✓

Partielle Ableitungen: $D_1 f(x,y) = y x^{y-1} - y^x \ln y$, $D_2 f(x,y) = x^y \ln x - x y^{x-1}$.

• In $(2,4)$ sind diese beiden partiellen Abl. $\neq 0$, also ist die Glg. dort lokal nach x oder y auflösbar,
es gilt $g'(2,4) = -\frac{D_1 f(2,4)}{D_2 f(2,4)} = -\frac{2^5 - 2^5 \ln 2}{2^4 \ln 2 - 8}$ für die Ableitung der Auflösung nach y.

• In (e,e) gilt $f'(e,e) = \text{grad} f(e,e) = (0,0)$, impl. Funktionensatz nicht anwendbar. [f dort nicht auflösbar, ...]

Beweisidee des impliziten Funktionensatzes mit dem Banachschen Fixpunktsatz:

Die Matrix $B := D_y F(a,b)$ ist nach Vor. inv'bar.
Dann ist $I_m - B^{-1} \cdot (D_y F(a,b)) = 0$ (Nullmatrix) und $B^{-1} F(a,b) = 0 \in \mathbb{R}^m$,
da $F(a,b) = 0$. • Daher ex. Umgebung U von a und ε-Umgebung V_ε von b
mit $U \times V_\varepsilon \subseteq W$ so, daß $\forall x \in U \ \forall y \in V_\varepsilon$: $\| I_m - B^{-1} \cdot (D_y F(x,y)) \| \leq \frac{1}{2}$ ← Abb.norm für Matrizen
und $\| B^{-1} F(x,b) \| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ ← eukl. Norm für Vektoren.

• Sei $\mathcal{F} := \{ h : U \to \mathbb{R}^m ;\ h \text{ stetig},\ h(a) = b,\ \| h(x) - b \| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } x \in U \}$,
dann enthält $\mathcal{F}$ z.B. die konstante Fkt. $h(x) \equiv b$.
• $\mathcal{F}$ ist abgeschlossene Teilmenge des Banachraums der beschränkten Funktionen $U \to \mathbb{R}^m$
mit der Supremumsnorm $\| h \|_\infty := \sup \{ \| h(x) \| ;\ x \in U \}$.
• Man kann zeigen, dass $\Phi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $(\Phi h)(x) := h(x) - B^{-1} F(x, h(x))$
eine Kontraktion ist.
Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat Φ einen Fixpunkt g, also $g \in \mathcal{F}$ mit
$(\Phi g)(x) = g(x) - B^{-1} F(x, g(x)) = g(x)$, also $F(x, g(x)) = 0$ wie zu zeigen war.
$\square$

Satz von der lokalen Umkehrfunktion für $f : W \to \mathbb{R}^n$, $W \subseteq \mathbb{R}^n$:

Vor.: Sei $a \in U$, $b := f(a)$ und f stetig diff'bar. Weiter sei $\det Df(a) \neq 0$,
d.h. $Df(a)$ invertierbar.
Beh.: 1. Dann ist f bei a lokal umkehrbar, d.h. es gibt offene Umgebungen
U von a und V von b im $\mathbb{R}^n$ so, dass $f : U \to V$ bijektiv ist.
2. Die Umkehrabbildung $f^{-1} : V \to U$ ist ebenfalls stetig diff'bar
mit der Ableitung $\quad Df^{-1}(x) = \underbrace{(\underbrace{Df(x)}_{\text{Matrix}})^{-1}}_{\text{inverse Matrix!}}$ für alle $x \in V$.

[Suggestive Kurzform: $(f^{-1})' = (f')^{-1}$]

• Beweis gelingt mit der Hilfsfunktion $F : W \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x,y) = f(x) - y$
und dem impliziten Funktionensatz.
• Für $n = 1$ reduziert sich die Vor "$\det Df(a) \neq 0$" auf "$f'(a) \neq 0$" und das bekannte Ana1-Analogon
• globale Umkehrbarkeit (auf ganz W) nur selten machbar
• Eine Abb. $f : U \to V$, $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Diffeomorphismus, falls f bijektiv und f, f^{-1} stetig db