8.1.14

Repetitorium WiSe 2013/14

Lineare Algebra Teil:

Stichworte:

Vektorräume und Skalarprodukte: Bilinearformen
Bilinearformen, quadratische Formen, reelle Skalarprodukte, hermitesche Formen, Orthogonalität, positiv und negativ (semi)definite Formen/Matrizen, Sylvesters Trägheitssatz, quadratische Formen und symmetrische Bilinearformen, Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren, ONB

Sei V ein K-Vektorraum.

Def.: Eine Abb. $b: V \times V \to K$ heißt Bilinearform, falls gilt:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & b(x_1+x_2, y_1) = b(x_1,y_1) + b(x_2,y_1) \\ & b(x_1, y_1+y_2) = b(x_1,y_1) + b(x_1,y_2) \end{array}\right\} \text{für alle } x_1,x_2,y_1,y_2 \in V$$

$$\left.\begin{array}{ll} (2) & b(\alpha x, y) = \alpha\, b(x,y) \\ & b(x, \alpha y) = \alpha\, b(x,y) \end{array}\right\} \text{für alle } x,y \in V,\ \alpha \in K$$

Spezielle Bilinearformen: Sei $b: V\times V \to K$ Bilinearform.

Def.: • b heißt symmetrisch, falls $b(x,y) = b(y,x)$ für alle $x,y \in V$.
Eine symmetrische Bilinearform heißt auch Skalarprodukt* auf V.
Ist $K = \mathbb{R}$, heißt ein S.P. dann ein reelles Skalarprodukt.

* oft wird noch positiv definit vorausgesetzt, s.u.

• b heißt alternierend, falls $b(x,x) = 0$ für alle $x \in V$.

• ist $V = K^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in V$,
so heißt das durch $b(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ def. Skalarprodukt
das kanonische Skalarprodukt auf dem K^n. Für $K = \mathbb{R}$: $\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (Standardskalarprodukt)

Bem.: • b alternierend $\Leftrightarrow b(x,x) = 0$ für alle $x \Rightarrow b(x,y) = -b(y,x)$ für alle x,y

$\left[\text{"}\Rightarrow\text{" wegen } \underbrace{b(x+y, x+y)}_{=0} = b(x+y,x) + b(x+y,y) = \underbrace{b(x,x)}_{=0} + b(y,x) + b(x,y) + \underbrace{b(y,y)}_{=0}\right]$

• Bilinearformen b lassen sich bzgl. Basis $B = (w_1, \ldots, w_n)$ von V durch Matrizen darstellen:
$x = \sum x_i w_i$, $y = \sum y_i w_i \Rightarrow b(x,y) = \sum_{i,j} b(w_i, w_j) x_i x_j$

- Zusammenhang Bilinearformen $\leftrightarrow$ Matrizen:
  Sei $B=(w_1,\dots,w_n)$ Basis von V, $b: V\times V\to K$ Bilinearform.
  Dann heißt $M_B(b) := (b(w_i,w_j))$ Matrix von b bzgl. B.
  Ist umgekehrt $A\in K^{n\times n}$ Matrix, so wird durch $b_A(x,y) := x^T A y = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ eine Bilinearform definiert mit $M_{I_n}(b_A) = A$.
- Es gilt: $b(x,y) = (\beta_B(x))^T \cdot M_B(b) \cdot \beta_B(y)$.

anders als bei lin. Abb.

<u>Transformationsformel</u> (= Basiswechsel): B, B' Basen von V, b Bilinearform $\Rightarrow M_{B'}(b) = (M_B^{B'}(id))^T \cdot M_B(b) \cdot M_B^{B'}(id)$

<u>Def.</u>: Zwei Matrizen $C, D\in K^{n\times n}$ heißen <u>kongruent</u>, wenn sie bzgl. geeigneter Basen dieselbe Bilinearform darstellen, d.h. falls $C = M_C(b)$, $D = M_D(b)$ für eine Bilinearform b auf einem K-VR V gilt.

Zwei Problemstellungen für Bilinearformen:

1. Das <u>Normalformenproblem</u> für Bilinformen: bestimme Basis B so, daß $M_B(b)$ einfach
2. Das <u>Kongruenzproblem</u> für Matrizen: entscheide, ob zwei Matrizen kongruent sind

Wichtige Sätze: Sei $\dim_K V = n$, b Bilinform auf V, B Basis von V, $C, D\in K^{n\times n}$. Dann:

1. b symmetrisch $\Leftrightarrow M_B(b)$ symmetrisch
2. b alternierend $\Leftrightarrow M_B(b)$ schiefsymmetrisch, d.h. $M_B(b) = -M_B(b)^T$
3. Äquivalent sind: (i) C kongruent D, (ii) $D = P^T C P$ für inv'bare Matrix P, (iii) $\exists$ Basis B': $D = M_{B'}(b_C)$.
4. Kongruente Matrizen haben denselben Rang.

<u>Def.</u>: Ist b symmetrische Bilinform auf V, so heißt $q: V\to K$, $q(x) := b(x,x)$ eine <u>quadratische Form</u>.

Es gilt: • $q(\alpha x) = \alpha^2 q(x)$ für alle $\alpha\in K, x\in V$
- $b(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ [$\leadsto$ zu qu. Form gehört wieder symm. Bilinearform]
- ist $A\in K^{n\times n}$ symmetrisch, so ist durch $q(x) := x^T A x$ eine qu. Form gegeben

Orthogonalität

Sei b eine symmetrische Bilinearform auf V über Körper K (z.B. $b = \langle \cdot, \cdot \rangle$ über $\mathbb{R}$)

Def.: • $x, y \in V$ heißen orthogonal, falls $b(x,y) = 0$

• ist $S \subseteq V$, so heißt $S^\perp = \{x \in V;\ b(x,y) = 0$ für alle $y \in S\}$ das orthogonale Komplement von S in V.

• ist $S \subseteq V$, so heißt S Orthogonalsystem von V bzgl. b, falls $\forall x,y \in S, x \neq y: b(x,y) = 0$

• ist $S \subseteq V$ Basis von V, das Orthogonalsystem ist, so heißt S Orthogonalbasis

• ist $S \subseteq V$ Orthogonalbasis von V mit $b(x,x) = 1$ (für alle $x \in S$), so heißt S Orthonormalbasis (ONB)

Wichtige Sätze: Sei $S \subseteq V$ und U ein UVR von V, b ein S.P. auf V. Dann:

1. $S^\perp$ ist UVR von V
2. ist b nicht ausgeartet, d.h. $\{x \in V;\ b(x,y) = 0$ für alle $y \in V\} = \{0\}$ [$\Leftrightarrow$ Rang $M_B(b) = n$] und $\dim V < \infty$, so gilt $V = U \oplus U^\perp$
3. $\dim V < \infty \Rightarrow V$ hat bzgl. b Orthogonalbasis

Bem.: • im $\mathbb{R}^n$ gilt für das Standard-S.P. $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$, dass $\langle x, y \rangle = 0$ ist genau wenn x und y senkrecht/orthogonal aufeinanderstehen [cos-Satz, s. später]

• Im $\mathbb{R}^n$ gilt für das Standard-S.P. $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ die Ungl. $\langle x, x \rangle > 0$ falls $x \neq 0$, dann ist $\sqrt{\langle x, x \rangle}$ die Länge des Vektors x.
über $\mathbb{C}$ gilt aber $\sum_{k=1}^n x_k^2 > 0$ nicht mehr für alle $x \in \mathbb{C}^n$.
Daher braucht man dann hermitesche Formen, welche wie folgt definiert werden:

Def.: • Sei V ein $\mathbb{C}$-VR. Eine Abb. $b: V \times V \to \mathbb{C}$ heißt Sesquilinearform, falls

1. $b(\alpha x + \beta y, z) = \alpha b(x,z) + \beta b(y,z)$ für alle $x, y, z \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
2. $b(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha} b(x,y) + \bar{\beta} b(x,z)$ " "

konj. kompl.

• Eine Sesquilinearform heißt hermitesche Form, falls $b(x,y) = \overline{b(y,x)}$ für alle $x, y \in V$.

• Für $V = \mathbb{C}^n$ heißt $b(x,y) = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$ die kanonische (Standard-) hermitesche Form.

• $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt hermitesch, falls $A = \bar{A}^T$.

• Zusammenhang hermitesche ~~Bilinear~~formen ↔ Matrizen:

Sei $B=(w_1,\dots,w_n)$ Basis von V, $b: V\times V\to\mathbb{C}$ hermitesche ~~Bilinear~~form.

"Strukturmatrix" von b

Dann heißt $M_B(b) := (b(w_i,w_j))$ Matrix von b bzgl. B. Diese Matrix ist hermitesch.

Ist umgekehrt $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesche Matrix, so wird durch $b_A(x,y) := x^T A\bar{y} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i\bar{y}_j$ eine hermitesche ~~Bilinear~~form definiert mit $M_{I_n}(b_A)=A$.

• Es gilt: $b(x,y) = (\beta_B(x))^T \cdot M_B(b)\cdot \overline{\beta_B(y)}$.

anders als bei lin. Abb.

<u>Transformationsformel</u> (= Basiswechsel): B, B' Basen von V, b hermitesche ~~Bilinear~~form $\Rightarrow M_{B'}(b) = (M_B^{B'}(id))^T\cdot M_B(b)\cdot \overline{M_B^{B'}(id)}$

<u>Def.</u>: Zwei Matrizen $C,D\in\mathbb{C}^{n\times n}$ heißen hermitesch <u>kongruent</u>, wenn sie bzgl. geeigneter Basen dieselbe Bilinearform darstellen, d.h. falls $C=M_C(b)$, $D=M_D(b)$ für eine Bilinearform b auf einem $\mathbb{C}$-VR V gilt.

Wichtige Sätze: Sei $\dim_{\mathbb{C}} V = n$, b hermitesche ~~Bilin~~form auf V, B Basis von V, $C,D\in\mathbb{C}^{n\times n}$. Dann:

1. Äquivalent sind: (i) C hermitesch kongruent D, (ii) $D = P^T C\bar{P}$ für inv'bare Matrix P,
   (iii) $\exists$ Basis B' des $\mathbb{C}^n$: $D = M_{B'}(b_C)$.
2. Jede hermitesche Matrix ist zu einer Diagonalmatrix hermitesch kongruent.

Positive Definitheit

oft: Def. von S.P. beinhaltet "pos. def."

<u>Def.</u>: Eine hermitesche Form (bzw. reelles S.P.) b auf V heißt <u>positiv definit</u>, falls 1. $b(x,x)\geq 0$ für alle $x\in V$ und 2. $b(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

• Gilt nur 1., so heißt b <u>positiv semidefinit</u>.

• Entsprechend <u>negativ (semi-) definit</u>, wenn $\geq$ in 1. durch $\leq$ ersetzt wird.

• Für positiv definite hermitesche Formen (bzw. reelle S.P.) kann man definieren:

<u>Länge</u> von x: $\|x\| := \sqrt{b(x,x)}$

<u>Abstand</u> von x und y: $d(x,y) := \|x-y\|$

• Eine symmetrische/hermitesche Matrix A heißt <u>positiv definit</u>, falls $x^T A x\geq 0$ und $x^T A x = 0 \Leftrightarrow x=0$ gilt, d.h. b_A ist positiv definit.

<u>Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren</u>: Sei V endl. dim. über $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$.
Sei $(v_1,\dots,v_m)$ lin. unabh. in V, $\langle\,,\rangle$ sei eine pos. def. hermitesche Form
bzw. ein pos. def. reelles S.P. auf V.

Durch
$$b_1 := v_1,$$
$$b_2 := v_2 - \frac{\langle v_2,b_1\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle}\cdot b_1 \qquad \rightsquigarrow \text{dann } \langle b_2,b_1\rangle = \dots = 0$$
$$b_3 := v_3 - \frac{\langle v_3,b_1\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle}\cdot b_1 - \frac{\langle v_3,b_2\rangle}{\langle b_2,b_2\rangle}\cdot b_2 \qquad \rightsquigarrow \text{dann } \langle b_3,b_2\rangle = \langle b_3,b_1\rangle = 0$$
$$\vdots$$
$$b_m := v_m - \frac{\langle v_m,b_1\rangle}{\langle b_1,b_1\rangle}\cdot b_1 - \dots - \frac{\langle v_m,b_{m-1}\rangle}{\langle b_{m-1},b_{m-1}\rangle}\cdot b_{m-1}$$

ist eine Orthogonalbasis $(b_1,\dots,b_m)$ von $L(v_1,\dots,v_m)$ gegeben,
für die $L(v_1,\dots,v_m) = L(b_1,\dots,b_m)$ gilt. (L = lin. Hülle)
Durch $c_\alpha := \frac{b_\alpha}{\|b_\alpha\|}$ wird dann eine ONB von $L(v_1,\dots,v_m)$ geg.

- Das Schmidsche Orthogonalisierungsverfahren macht aus einer Basis $(v_1,\dots,v_m)$ eine ONB $(c_1,\dots,c_m)$. Man kann damit auch jedes Orthogonalsystem zu einer ONB ergänzen.

<u>Trägheitssatz von Sylvester</u>

Sei V endl. dim. über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, b <u>symm. Bilinform</u> bzw. <u>hermitesche</u> Form. Dann:
d.h. b selbstadjungiert, vgl. Termin 12

Symmetrische Bilin.formen sind diag'bar!

(a) Es ex eine bzgl. b orthogonale Basis $\mathcal{B}$ von V mit
$$M_{\mathcal{B}}(b) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix}-1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1\end{matrix}} & \\ & & \boxed{\begin{matrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad (\text{restl. Einträge} = 0)$$

(b) bei jeder anderen Diagonalmatrix $M_{\mathcal{B}'}(b)$, d.h. für jede andere bzgl. b orthog. Basis $\mathcal{B}'$,
stimmen die Anz. der positiven Eintragungen mit der Anz. der 1en
die " " negativen " " " " " -1en,
und die " der Nullen " " " " Nullen
in der Matrix in (a) überein.

- Es gilt: b positiv definit $\Leftrightarrow$ Anzahl 1en $=\dim V$

Signatur bzw. Trägheitsindex:

<u>Def.:</u> Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch bzw. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch.

Sei $U_+ := L(v \in \mathbb{R}^n;\ v$ EV von A zu positivem EW$)$,

$U_- := L(v \in \mathbb{R}^n;\ v$ EV von A zu negativen EW$)$,

$U_0 := L(v \in \mathbb{R}^n;\ v$ EV von A zum EW $0\} = \ker A$.

Dann heißt das Tripel $(\dim U_+, \dim U_-, \dim U_0)$ die Signatur von A bzw. Trägheitsindex von A.

- Nach Sylvester hat jede Matrix $G^T A G$ bzw. $\overline{G}^T A \overline{G}$ dieselbe Signatur wie A, wo G inv'bar.

Normalform für alternierende Bilinearformen [symplektische Basis]:

Jeder endlichdim. symplektische VR hat gerade Dimension.
Es gibt darin eine Basis $(b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n)$ mit: $b_i \perp b_j$, $c_i \perp c_j$ für alle $i \neq j$ und $\langle b_i, c_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$, die "symplektische Basis".

- <u>Bem.:</u> symplektische Bilinearform = nichtausgeartete alternierende Bilinearform
  symplektischer VR = VR mit symplektischer Bilinearform

- <u>Cauchy-Schwarzsche Ungleichung</u> für pos. semidefinite quadratische Formen / die zugehörige pos. semidefinite symmetrische Bilinearform b: $b(x,y)^2 \leq b(x,x)\, b(y,y)$ für alle x, y des VRs

- <u>Determinantenkriterium</u> für positiv definite Matrizen / Bilinearformen:
  (<u>Hurwitz-Kriterium</u>)
  Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch bzw. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch (d.h. A selbstadjungiert).
  Dann: A positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Hauptunterdeterminanten $d_k > 0$,
  wobei $d_k := \det(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ mit $1 \leq k \leq n$ ist

- Weitere <u>Kriterien für Definitheit</u> von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch bzw. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch:
  - A pos. def. $\Leftrightarrow$ alle EW > 0
  - A neg. def. $\Leftrightarrow$ alle EW < 0
  - A pos. semidef. $\Leftrightarrow$ alle EW ≥ 0
  - A neg. semidef. $\Leftrightarrow$ alle EW ≤ 0
  - A indefinit $\Leftrightarrow$ A besitzt positive und negative EWe