18.12.13

Repetitorium WiSe 2013/14

$\boxed{\text{Lineare Algebra-Teil:}}$

Jordansche Normalform (JNF)

Gesehen: $f: V \to V$ diag'barer Endo $\Rightarrow V = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k}$ mit Eigenräumen E_{λ_i}, die $f(E_{\lambda_i}) \subseteq E_{\lambda_i}$ erfüllen.

Definition: Ein Unterraum $U \subseteq V$ mit $f(U) \subseteq U$ heißt <u>f-invariant</u>.

Ziel: Finde auch für nicht diag'bare $f \in End(V)$ solche f-invarianten Unterräume $V_1, \ldots, V_k$ mit $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ so, dass $f|_{V_1}, \ldots, f|_{V_k}$ möglichst einfache Abbildungsmatrizen haben.

Idee: Konstruktion mit $V_i := \ker q_i(f)$ mit geeignetem Polynom $q_i \in K[X]$, denn bei $E_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i \, id_V)$ ist $q_i = X - \lambda_i \in K[X]$.

Bemerkungen zu Unterräumen der Form $\ker q(f)$, mit $q \in K[X]$:

1) $\ker q(f)$ ist f-invariant, da $x \in \ker q(f) \Rightarrow q(f)(x) = 0 \Rightarrow q(f)(f(x)) = f \circ \overbrace{q(f)(x)}^{=0} = 0$ $\Rightarrow f(x) \in \ker q(f)$

2) $q \mid r \Rightarrow \ker q(f) \subseteq \ker r(f)$,
da $r = q \cdot s$, $x \in \ker q(f) \Rightarrow r(f)(x) = s(f)(\overbrace{q(f)(x)}^{=0}) = 0 \Rightarrow x \in \ker r(f)$.

3) q, r teilerfremd $\Rightarrow \ker(q \cdot r)(f) = \ker q(f) \oplus \ker r(f)$,
da $1 = sq + tr$ (ggT-Darstellung) $\Rightarrow x = \underbrace{s(f)(q(f)(x))}_{\in \ker r(f)} + \underbrace{t(f)(r(f)(x))}_{\in \ker q(f)}$,
für $x \in \ker r(f) \cap \ker q(f)$ folgt $x = 0 + 0 = 0$, also ist die Summe direkt.

4) $q_1, \ldots, q_k$ p.w. teilerfremd $\Rightarrow \ker(q_1 \cdots q_k)(f) = \ker q_1(f) \oplus \ldots \oplus \ker q_k(f)$.
$\rightsquigarrow$ direkte Summenzerlegung in f-invariante Unterräume!

Geeignete Basen $\rightsquigarrow$
Abbildungsmatrix A von f hat Blockform
$$A = \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_k} \end{bmatrix}$$
A_i = Abb.matrix von $f|_{\ker q_i(f)}$

5) Speziell für das Mipo μ_f von f gilt in 4):
Ist $\mu_f = m_1 \cdots m_k$ Zerlegung in teilerfremde normierte Faktoren $m_i \in K[X]$, $i=1,\dots,k$, so ist $m_i = \mathrm{Mipo}(f|_{\ker m_i(f)})$.

Folgerung: Ein weiteres Diagonalisierbarkeitskriterium (mit Mipo):

Satz: V ein K-VR, $\dim V = n$, $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann:
f diag'bar $\Leftrightarrow$ Mipo μ_f zerfällt in einfache Linearfaktoren,
d.h. $\mu_f = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_k)$, die λ_i p.w.v.

Bem.: Spezielle diag'bare Matrizen: 1) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch $\Rightarrow$ A diag'bar, 2) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch $\Rightarrow$ diag'bar, s. später

6) Betr. man als Endos Matrizenabbildungen $f: K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$,
folgt: A ähnlich zu Diagonalmatrix $\Leftrightarrow$ Mipo zerfällt in $\underbrace{\text{einfache}}_{\text{d.h. Vielfachheit 1}}$ Linearfaktoren

Motivation Hauptraum:

Sei λ EW von f der Vielfachheit r, d.h. $\chi_f = (X-\lambda)^r \cdot P$ und $P(\lambda) \neq 0$. (Def. von r)
Für $\mu_f = \mathrm{Mipo}(f)$ gilt $\mu_f | \chi_f$, also $\mu_f = (X-\lambda)^s \cdot Q$ mit $1 \le s \le r$, $Q | P$, $Q(\lambda) \neq 0$

Kor. aus Cayley-Hamilton $\rightsquigarrow$ ($s \neq 0$, denn μ_f hat dieselben Nullstellen wie χ_f, vgl. Termin8_LA, S.5 unten).

Also mit Bem. 4/5): $V = \ker(f-\lambda \mathrm{id}_V)^r \oplus \ker P(f) = \underbrace{\ker(f-\lambda\mathrm{id}_V)^s}_{\subseteq \ker(f-\lambda\mathrm{id}_V)^r} \oplus \underbrace{\ker Q(f)}_{\subseteq \ker P(f)}$,
es folgt aus Dimensionsgründen $\ker(f-\lambda\mathrm{id}_V)^r = \ker(f-\lambda\mathrm{id}_V)^s$ (nicht notw. $r=s$).

Definition: Der Unterraum $H_\lambda := \ker(f-\lambda\mathrm{id}_V)^r$ für $r \in \mathbb{N}$ heißt Hauptraum zum Eigenwert λ von f.

Die Vielfachheit s von λ im Mipo μ_f heißt auch Index des Hauptraums
(nicht mit der algebraischen Vielfachheit r, der Vielfachheit von λ in χ_f, verwechseln!).
Dieser Index s ist die kleinste Zahl mit $\ker(f-\lambda\mathrm{id}_V)^s = \ker(f-\lambda\mathrm{id}_V)^{s+1}$
(so kann s auch berechnet werden $\rightsquigarrow$ Mipo kann so berechnet werden!).

Spezialfall $\chi_f = (-1)^n (X-\lambda)^n$, d.h. $H_\lambda = V$: dann ist s die kleinste Zahl
mit $(f-\lambda\mathrm{id}_V)^s = 0$ (Nullabb.) bzw. $(\underbrace{A-\lambda I_n}_{\text{nilpotent}})^s = 0$ (Nullmatrix)

Motivation jetzt: Wollen f auf Hauptraum H_λ untersuchen, ob die zugehörige (nilpotente) Blockmatrix A_i (vgl. 4)) auch auf einfache Gestalt bringen kann.

Betr. dazu die Kette

$$\underbrace{\{0\}}_{U_0} \subsetneq E_\lambda = \underbrace{\ker(f-\lambda \mathrm{id}_V)}_{U_1} \subsetneq \underbrace{\ker(f-\lambda \mathrm{id}_V)^2}_{U_2} \subsetneq \ldots \subsetneq \underbrace{\ker(f-\lambda \mathrm{id}_V)^s}_{U_s} = H_\lambda$$

Abkürzung: U_0, U_1, U_2, U_s

[Kette endet irgendwann bei endl. Dim. von V]
$\rightsquigarrow$ irgendwann ist $(f-\lambda \mathrm{id}_V)^s \equiv 0$ (Nullabb.)

Stelle dann H_λ als direkte Summe von UVRen dar:

$$H_\lambda = U_{s-1} \oplus W_1 = (U_{s-2} \oplus W_2) \oplus W_1 = \ldots = U_1 \oplus W_{s-1} \oplus \ldots \oplus W_1$$
$$= W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_{s-1} \oplus E_\lambda .$$

Dadurch wird H_λ weiter zerlegt [die W_i sind dabei f-unzerlegbar, d.h. $\nexists$ keine f-inv. UR. V_1, V_2 mit $W_i = V_1 \oplus V_2$]

Werden in den W_i geschickte Basen gewählt, kann dann in den zugehörigen Abbildungsmatrizen einfache Gestalt erwartet werden.

Konstruktion so:
- Wähle W_1 beliebig, irgendeine Startbasis $B_1 = (v_1^{(1)}, \ldots, v_{q_1}^{(1)})$ darin.
- Für $v_i^{(2)} := (f-\lambda \mathrm{id}_V)(v_i^{(1)}) \in U_{s-1}$ gilt $\underbrace{\langle v_1^{(2)}, \ldots, v_{q_1}^{(2)} \rangle}_{\text{lin. unabh.}} \cap U_{s-2} = \{0\}$,
  ergänze diese (irgendwie, d.h. bel.) zu
  Basis $B_2 = (v_1^{(2)}, \ldots, v_{q_1}^{(2)}, v_{q_1+1}^{(2)}, \ldots, v_{q_2}^{(2)})$ von W_2
- fahre so fort, erhalte Gesamtbasis $B = (B_1, B_2, \ldots, B_s)$,
  die letzten $v_i^{(s)} \in U_1 = E_\lambda$ werden zu Basis in
- dann: $\begin{cases} (f-\lambda \mathrm{id}_V)(v_i^{(j)}) = v_i^{(j+1)}, \text{ also } f(v_i^{(j)}) = \lambda v_i^{(j)} + v_i^{(j+1)} \\ \qquad \text{für } j = 1, \ldots, s-1, \\ \text{und } f(v_i^{(s)}) = \lambda v_i^{(s)} \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ erhalten Abb.matrix bzgl. B:

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} A_{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{(q)} \end{bmatrix} \in K^{r \times r}, \text{ wo}$$

$r = \dim H_\lambda$, [Vielfachheit von λ in χ_f, s.o.]

$$\text{mit } A_{(i)} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & & \cdots \\ 1 & \lambda & & & \vdots \\ \vdots & 1 & \lambda & & \vdots \\ & & 1 & \lambda \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \lambda & 0 \\ & & & \cdots 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ein $A_{(i)}$ heißt Jordan-Kästchen, die Matrix A_λ heißt Jordan-Block zum Eigenwert λ.

$\rightsquigarrow$ ein Jordan-Block besteht aus Jordan-Kästchen...

- Die Jordan-Kästchen haben eine Länge zwischen 1 und s (s = Vielfachheit von λ im Mipo μ_f, s.o.)

Es treten q_1 viele Kästchen der Länge s, [Bem. $q_1 \geq 1$, die $q_{i+1}-q_i$ können $=0$ sein]
q_2-q_1 " " " " $s-1$,
...
$q-q_{s-1}$ " " " " 1 auf.

Es gibt also $q = \dim E_\lambda$ viele Jordan-Kästchen insg. im Block A_λ zu λ.

Zusammenfassung als Satz über die JNF: [im Fall eines zerfallenden char. Poly]

Vor.: V ein K-VR, $\dim V = n$, $f: V \to V$ linear, $\chi_f = (-1)^n (X-\lambda_1)^{r_1} \cdots (X-\lambda_k)^{r_k}$ das charakteristische Polynom [Zerlegung möglich über alg. abg. K, etwa $K = \mathbb{C}$], die $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ p.w.v., Mipo $\mu_f = (X-\lambda_1)^{s_1} \cdots (X-\lambda_k)^{s_k}$.

Beh.: • Dann ex. Basis B von V, bezüglich der die Abb.matrix A_f die Form

$$A_f = \begin{bmatrix} \boxed{A_{\lambda_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A_{\lambda_k}} \end{bmatrix}$$

hat mit Jordan-Blöcken A_{λ_i} zum EW λ_i,

nämlich
$$A_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} \begin{array}{cccc|} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \\ \hline \end{array} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\lambda_i} \end{bmatrix}$$
der Länge r_i [= Exponent in χ_f von $(X-\lambda_i)$ = Dim. von H_{λ_i}].

- Es gilt $r_1 + \dots + r_k = n$.
- Innerhalb des Jordan-Blocks A_{λ_i} zum EW λ_i gibt es
$$2\dim\ker(f-\lambda_i\,\mathrm{id}_V)^\ell - \dim\ker(f-\lambda_i\,\mathrm{id}_V)^{\ell+1} - \dim\ker(f-\lambda_i\,\mathrm{id}_V)^{\ell-1}$$
viele Jordan-Kästchen der Länge ℓ, wo $\ell = 1, \dots, s_i$ ist [s_i = Exp. von $(X-\lambda_i)$ in μ_f].
Insgesamt treten $\dim E_{\lambda_i}$ viele Jordan-Kästchen in A_{λ_i} auf.
Es gibt mindestens ein Kästchen der Maximallänge s_i.
- Weitere Zerlegungen sind nicht möglich, die W_i sind $f|_{W_i}$-unzerlegbar.

Bem.: Gelegentlich notiert man die 1en in einem Kästchen nicht unterhalb sondern oberhalb der Diagonalen, was durch Änderung der Reihenfolge der Basisvektoren in B erreicht werden kann.

Beispiel für Jordan-Matrix:
$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}\right) \rightsquigarrow \chi_A = (X-1)(X+3)^3, \quad \mu_A = (X-1)(X+3)^2$$
[Jordan-Blocklänge] [∃ Kästchen der Länge 2]

<u>Ergänzung:</u> Ist V <u>f-unzerlegbar</u> [K alg. abg., etwa $\mathbb{C}$],
so ex. $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\mu_f = \pm \chi_f = (X-\lambda)^{\dim V}$, $\dim E_\lambda = 1$, $f \sim \begin{bmatrix} \lambda & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & \lambda \end{bmatrix}$.
Dann ist A_f ein Komplettes Jordan-Kästchen!
Dies ist auch die "Normalform" einer nilpotenten Matrix, da $f-\lambda\,\mathrm{id}_V$ immer nilpotent ist, s. S. -3-

<u>Def.:</u> $A \in K^{n\times n}$ heißt <u>nilpotent</u>, falls ein $s \in \mathbb{N}$ ex. mit $A^s = 0$ (Nullmatrix).
Das Kleinste solche s wird auch <u>Nilpotenzgrad</u> genannt.
Analog: $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ <u>nilpotent</u>, falls $\varphi^s = 0$ für ein $s \in \mathbb{N}$.

Für eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ sind äquivalent:
(1) A ist nilpotent, (2) $\chi_A = (-1)^n \cdot X^n$, (3) $\mu_A = X^k$ für ein $k \leq n$,
(4) A ist ähnlich zu einer <u>echten oberen Dreiecksmatrix</u> $\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$
(5) $A^n = 0$.
Eine nilpotente Matrix hat also nur den EW 0, ihre JNF ist eine echte obere Δ-Matrix der Form $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$, falls K^n A-unzerlegbar ist. Ist K^n zerlegbar, bekommt man für jeden direkten Summanden W_i, wenn $K^n = W_1 \oplus \ldots \oplus W_e$, ein solches Kästchen der Länge $\dim W_i$.

<u>Zur Existenz der JNF:</u>
Äquivalent sind: (1) $f \in \mathrm{End}(V)$ besitzt JNF,
(2) χ_f zerfällt über K in Linearfaktoren,
(gilt immer über alg. abg. Körper K, etwa $K = \mathbb{C} \rightsquigarrow$ JNF ex.!)
(3) Mipo μ_f zerfällt über K in Linearfaktoren (").

<u>Bem. zur JNF:</u> 1. Zwei Matrizen, deren char. Polynome in Linearfaktoren zerfallen, sind ähnlich $\Leftrightarrow$ haben dieselbe JNF
2. $A, B \in K^{n\times n}$ sind ähnlich $\Leftrightarrow$ ex. Oberkörper L von K, in dem A, B dieselbe JNF besitzen.

3. Durch Angabe von μ_A, χ_A ist A noch nicht eind. bestimmt, z.B. sind

$$A_1 = \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & & & \\ 0 & 2 & & & \\ \hline & & 2 & 1 & \\ & & 0 & 2 & \\ & & & & 2 \end{array}\right] \text{ und } A_2 = \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & & & \\ 0 & 2 & & & \\ \hline & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{array}\right]$$

beides Matrizen mit $\mu_{A_1} = \mu_{A_2} = (X-2)^2$

und $\chi_{A_1} = \chi_{A_2} = (X-2)^5$,

aber A_1, A_2 sind nicht äquivalent.

---

fakultativ

JNF über $\mathbb{R}$ [ohne Herleitung]:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit char. Polynom

$$\chi_A = (-1)^n (X-\lambda_1)^{r_1} \cdots (X-\lambda_k)^{r_k} \cdot (X^2 + a_1 X + b_1)^{t_1} \cdots (X^2 + a_m X + b_m)^{t_1}$$

mit den verschieden EWen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ von A

und p.w.v. reellen Polynomen $X^2 + a_1 X + b_1, \dots, X^2 + a_m X + b_m$ ohne Nullstellen in $\mathbb{R}$.

[mit Fund. satz der Algebra für $\mathbb{C}$: fasse reelle und nichtreelle Nst. zusammen, die nichtreellen Nst. treten immer als Paar $z, \bar{z}$ auf [vgl. pq-Formel], denn beachte: $P(z) = 0 \Rightarrow P(\bar{z}) = 0$ für $P \in \mathbb{R}[X]$.]

Dann gibt es eine zu A ähnliche Matrix $\hat{A}$ mit $\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{\lambda_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & A_{\lambda_k} & & & \\ & & & B_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & B_m \end{bmatrix}$,

wo die A_{λ_i} Jordan-Blöcke zu den EWen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$

sind und die Blöcke B_ℓ von der Form $B_\ell = \begin{bmatrix} B_\ell^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & B_\ell^{(m_\ell)} \end{bmatrix}$, $\ell = 1, \dots, m$,

und das Kästchen $B_\ell^{(j)}$, $j = 1, \dots, m_\ell$, hat die Gestalt

$$B_\ell^{(j)} = \left[\begin{array}{cc|cc|c|cc} x_\ell & y_\ell & & & & & \\ -y_\ell & x_\ell & & & & & \\ \hline 1 & 0 & x_\ell & y_\ell & & & \\ 0 & 1 & -y_\ell & x_\ell & & & \\ \hline & & & \ddots & \ddots & & \\ \hline & & & & 1 \;\; 0 & x_\ell & y_\ell \\ & & & & 0 \;\; 1 & \underbrace{-y_\ell}_{} & \underbrace{x_\ell}_{\text{ist Drehmatrix, s. später}} \end{array}\right]$$

, wo $x_\ell \pm i y_\ell$, $y_\ell > 0$, die komplexen Nst. von $X^2 + a_\ell X + b_\ell$ sind.

(x_ℓ: Re-Teil, y_ℓ: Im-Teil)

Bsp.: $A = \begin{bmatrix} 1+i & & & \\ 1 & 1+i & & \\ & & 1-i & \\ & & 1 & 1-i \end{bmatrix} \rightsquigarrow \chi_A = (x-(1+i))^2 (x-(1-i))^2 = (x^2-2x+2)^2$

ist JNF über $\mathbb{C}$, die JNF über $\mathbb{R}$: $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ -1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}$