4.12.13

Repetitorium WiSe 2013/14

Analysis-Teil:

Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Def. (Funktionenfolge): Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$. Wir nennen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch Funktionenfolge.

Def. (punktweise Konvergenz): $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt punktweise konvergent, falls für alle $x \in D$ die reelle Zahlenfolge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. In diesem Fall heißt die Fkt. $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ die Grenzfunktion von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Man sagt, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen f, in Zeichen: $f_n \xrightarrow{ptw} f$.

Analog für Reihen: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ punktweise konvergent $:\Leftrightarrow \forall x \in D: \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ kgt.

Notation dann: $\sum_{k=1}^{n} f_k \longrightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} f_k}_{\text{Symbol für die Grenzfkt.}}$

Def. (gleichmäßige Konvergenz): $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt gleichmäßig konvergent gegen die Grenzfunktion f [dieselbe wie eben!],

falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in D\ \forall n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

In Zeichen: $f_n \rightrightarrows f$.

Wenn $f_n \rightrightarrows f$, so gilt auch $f_n \xrightarrow{ptw.} f$, denn:

[$f_n \xrightarrow{ptw} f \Leftrightarrow \forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \underbrace{\forall x \in D\ \exists n_0 \in \mathbb{N}}_{\text{Unterschied zu oben: Vertauschung von } \forall \text{ und } \exists}\ \forall n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

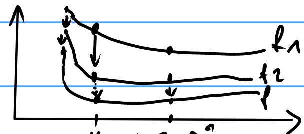
Wenn es (bei $f_n \rightrightarrows f$) ein n_0 gibt, das für alle $x \in D$ funktioniert, so gibt es (bei $f_n \xrightarrow{ptw} f$) sicher zu jedem $x \in D$ ein passendes n_0 (immer dasselbe n_0).]

Die Umkehrung ist falsch, d.h. $(f_n \rightrightarrows f) \not\Leftarrow (f_n \xrightarrow{ptw} f)$,

Standard-Bsp. → wie das Bsp. $f_n(x) := x^n$, $f_n : (0,1] \to \mathbb{R}$ zeigt (Grenzfunktion ist $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$)

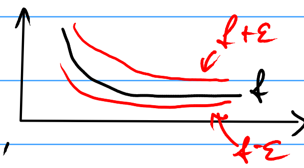
<u>Anschaulich:</u>

<u>punktweise:</u>



x kgz für jedes $x \in D$

<u>gleichmäßig:</u> Ab einem n_0 liegen alle $f_n, n \geq n_0$, im ε-Schlauch um f,



d.h. $f(x)-\varepsilon < f_n(x) < f(x)+\varepsilon$
$\Leftrightarrow |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$

<u>Umformulierung:</u>

$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0: \sup\{|f_n(x)-f(x)|;\ x\in D\} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\{|f_n(x)-f(x)|;\ x\in D\}\right) = 0.$

Auf dem $\mathbb{R}$-VR der beschränkten reellen Funktionen $f: D\to\mathbb{R}$ wird durch $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|;\ x\in D\}$ eine Norm definiert, die <u>Supremumsnorm</u>.

Somit: $f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$

<u>Praktisches Vorgehen:</u> Untersuche $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz:

1. Punktweise gegen Grenzfunktion: bestimme x, für die $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ kgt. und den GW $=: f(x)$
2. Schätze Supremum der Abstände $|f_n(x)-f(x)|$ ab, etwa durch Lösen der entsprechenden Extremwertaufgabe mit $g(x) := |f_n(x)-f(x)|$.
   Kriegt man dieses Supremum für alle hinreichend großen n $\underbrace{\text{unter } \varepsilon \text{ abgeschätzt}}_{\text{"klein"}}$, ok.
3. Oder eins der Kriterien unten.

<u>Folgerungen aus der gleichmäßigen Konvergenz</u>

1. Die Grenzfunktion einer glm. kgten Folge stetiger Funktionen ist stetig.
2. Etwas allgemeiner: Sei x_0 ein Häufungspunkt von $D\subseteq\mathbb{R}$, $f_n: D\to\mathbb{R}$ Funktionenfolge, $f_n \rightrightarrows f$ auf D, für alle n ex. der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$.
   Dann existieren die beiden folgenden GWe und sind gleich:
   $$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right).$$
   [Spezialfall von 1., denn sind die f_n alle stetig auf D, ist Vor. in 2. erfüllt.]

Somit: Vertauschung zweier Grenzwertbildungen ist möglich bei gleichmäßiger Konvergenz der betrachteten Funktionenfolge.

<u>Bsp.:</u> • $f_n(x) := x+\frac{1}{n}$, $f(x) = x$ auf $D=[0,1]$. Dann: $f_n \rightrightarrows f$ [vgl. Def.],
und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{(x+\tfrac{1}{n})}_{=f_n(x)}\right)$

• $f_n(x) := x^n$ auf $D=(0,1] \rightsquigarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\underbrace{\lim\limits_{x\to 1} x^n}_{=1^n=1}\right) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} x^n}_{=\begin{cases}0, & x<1\\ 1, & x=1\end{cases}}\right)$ ex. nicht

3. Sind $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-integrierbar, $f_n \rightrightarrows f$ auf $[a,b]$, dann ist f R-int'bar und $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\,dt\right) = \int_a^b \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)\right)dt$.

4. Sind $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ diff'bar, alle f_n in mind. einem $x_0\in[a,b]$ Kgt., sind $f_n' \rightrightarrows g$ auf $[a,b]$, dann gilt $f_n \rightrightarrows f$ gegen $f(x):=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, f ist dann differenzierbar und es gilt

$$g(x)=f'(x),\ \text{d.h.}\qquad \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \Big(\underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n}_{\text{Grenzfkt.}}\Big)'(x).$$

Rechenregeln für gleichmäßige Konvergenz

1. $f_n\rightrightarrows f$, $g_n\rightrightarrows g$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\lambda f_n+\mu g_n\rightrightarrows\lambda f+\mu g$, $\quad |f_n|\rightrightarrows|f|$
2. $f_n\rightrightarrows f$, $\exists\alpha>0\ \forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in D: f_n(x)\geq\alpha \Rightarrow \frac{1}{f_n}\rightrightarrows\frac{1}{f}$
3. f_n, g_n auf D beschr., $f_n\rightrightarrows f$, $g_n\rightrightarrows g$ $\Rightarrow$ $f_n g_n\rightrightarrows fg$
4. $f_n\rightrightarrows 0$ (Nullfkt.), die g_n gleichmäßig beschränkt
   (d.h. $\exists C>0\ \forall n\in\mathbb{N}: \|g_n\|_\infty\leq C$ bzw. $\forall x\in D: |g_n(x)|\leq C$),
   dann gilt: $f_n g_n\rightrightarrows 0$ (Nullfkt.).
5. $\sum|f_n|$ gleichmäßig Kgt. $\Rightarrow$ $\sum f_n$ gleichmäßig Kgt.
   [nicht „$\Leftarrow$", z.B. unteres Bsp. (b)]
6. $\sum|f_n|$ gleichmäßig Kgt., g_n glm. beschränkt $\Rightarrow \sum f_n g_n$ glm. Kgt.

Kriterien für gleichmäßige Konvergenz

(a) Cauchy-Kriterium: Geg. Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $D\subseteq\mathbb{R}$.

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ glm. Kgt. $\iff \forall\varepsilon>0\ \exists n_0>0\ \forall x\in D\ \forall n,m>n_0: |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$

$\iff \forall\varepsilon>0\ \exists n_0>0\ \forall n,m>n_0\ \forall x\in D: |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$

$\iff \forall\varepsilon>0\ \exists n_0>0\ \forall n,m>n_0: \sup\{|f_n(x)-f_m(x)|; x\in D\}<\varepsilon$

$\iff \forall\varepsilon>0\ \exists n_0>0\ \forall n,m>n_0: \|f_n-f_m\|_\infty<\varepsilon$

$\sum f_k$ glm. Kgt. $\iff \forall\varepsilon>0\ \exists n_0>0\ \forall n\geq m>n_0: \sup\limits_{x\in D}\left|\sum\limits_{k=m}^{n} f_k(x)\right|<\varepsilon.$

$\left[\overset{n=m}{\Rightarrow}\right]$ $\quad\sum f_k$ glm. Kgt. $\Rightarrow f_k\rightrightarrows 0$

[nicht „$\Leftarrow$": $f_n(x):=\frac{1}{n}$, $D=\mathbb{R}$ erfüllt $f_n\rightrightarrows 0$, aber $\sum f_n$ div. in jedem Pkt. x]

(b) Weierstraß-Kriterium:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sup\{|f_k(x)|;\, x\in D\} = \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty \text{ kgt. in } \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f_k \text{ auf } D \text{ glm. kgt.}$$

Dieses Krit. gilt insb. dann, wenn es eine kgt-e Reihe $\sum c_k$ reeller Zahlen gibt mit $\sup\{|f_k(x)|;\, x\in D\} = \|f_k\|_\infty < c_k$ für alle k.

Eine Funktionenreihe, die die Vor. des Weierstraß-Kriteriums erfüllt, heißt auch normal konvergent. Somit: normale Kgz. $\Rightarrow$ glm. Kgz. [nicht "$\Leftarrow$", s. Bsp. (a)]

Kriterium für ungleichmäßige Konvergenz: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge stetiger Funktionen $f_n: D\to\mathbb{R}$, die auf D punktweise gegen f kgt., f unstetig
$\Rightarrow (f_n)$ nicht glm. kgt.

Wichtige Beispiele für Funktionenreihen sind die Potenzreihen $f_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, s. nächstes Mal. Sie konvergieren i.a. nicht in ihrem gesamten Konvergenzbereich K gleichmäßig, sondern nur auf kompakten Mengen im Innern von K.

Def.: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf D, $D\subseteq\mathbb{R}$ offen, heißt kompakt konvergent, wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf jeder in D enthaltenen kompakten Menge K glm. kgt.

Dies gilt genau dann, wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal glm. kgt., d.h. $\forall x\in D\ \exists$ Umgebung $U(x)$ mit $x\in U(x)\subseteq D$ derart, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $U(x)$ glm. kgt.

z.B.: $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\sum x^k$ ist auf $]-1,1[$ kompakt kgt., aber nicht glm. konvergent.

Beispiele:

(a) normale Kgz. $\not\Leftarrow$ glm. Kgz.: Bsp. $f_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k x^2}{(1+x^2)^k}$ auf $D=\mathbb{R}$.

Für festes $x\neq 0$ ist $\left|\frac{-1}{1+x^2}\right| < 1$,

für $x=0$ ist $f_n(0)=0$, die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^2}{(1+x^2)^k} = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{1+x^2}\right)^k$ kgt. für jedes (festgehaltene) x gegen $f(x) := x^2 \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{1+x^2}} = \frac{x^4+x^2}{x^2+2} = x^2 - 1 + \frac{2}{x^2+2}$.

Die Reihe kgt. glm. gegen f, nach Cauchy-Kriterium:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall m\geq n>n_0\ \forall x\in\mathbb{R}: \Big|\underbrace{\sum_{k=n+1}^{m}\frac{(-1)^k x^2}{(1+x^2)^k}}\Big|<\varepsilon$$

kgt. nach Leibnizkriterium für jedes x, und dies ist $< \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \leq \frac{\frac{1}{n-1}}{(1+\frac{1}{n-1})^n} < \frac{1}{n-1} < \varepsilon$ wenn $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. ✓

Standardkurvendiskussion

Aber: Keine normale Kgz., denn

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|\underbrace{\frac{(-1)^k x^2}{(1+x^2)^k}}_{=:g_k(x)}\Big| = \Big|g_k\Big(\sqrt{\tfrac{1}{k-1}}\Big)\Big| = \frac{\frac{1}{k-1}}{\left.(1+\frac{1}{k-1})^k\right\}\to e}, \text{ und } \sum\frac{1}{(k-1)e} \text{ div.}$$

(b) Das Bsp. (a) zeigt auch: $\sum g_n$ glm. kgt. $\not\Rightarrow$ $\sum|g_n|$ glm. kgt., denn wegen der Divergenz von $\sum_k \frac{\frac{1}{k-1}}{(1+\frac{1}{k-1})^k} = \sum_k \sup\{|g_k(x)|;\ x\in\mathbb{R}\}$ kann $\sum_k |g_k|$ nicht glm. konvergieren.

(c) Die Funktionenfolge $f_1(x):=\sin x$, $f_{n+1}(x):=\sin(f_n(x))$ für $x\in D=\mathbb{R}$ kgt. glm. gegen die Nullfunktion: ⌈Da $|f_1(x)|=|\sin x|\leq 1$, gilt $|f_n(x)|\leq f_n(1)$ für $n>1$. Also bleibt z.z.: $a_n\to 0$, wo $a_1:=1$, $a_{n+1}:=\sin a_n$.
Es ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend und alle $a_n\geq 0$, also kgt.
Da sin stetig ist, muß für $a:=\lim_{n\to\infty} a_n$ gelten $a=\sin a$, was genau für $a=0$ gilt.⌋

(d) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^2+k}{x^2}$ kgt. punktweise auf $D=\mathbb{R}$ nach Leibniz-Kriterium, auch kompakt, aber nicht gleichmäßig, da die Summanden unbeschränkt in $\mathbb{R}$ sind.

Die Reihe der Absolutbeträge, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2+k}{x^2}$, konvergiert nirgends in $\mathbb{R}$.