20.11.13

Repetitorium WiSe 2013/14

Analysis-Teil:

Besondere Funktionen:

Polynome: Eine Fkt. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Polynom, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ und reelle Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gibt ("Koeffizienten"), so dass $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
Ist $a_n \neq 0$, heißt a_n der Leitkoeff. und n Grad von f.
Notation: $\deg p = n$. Ist $a_n = 1$, so heißt f normiert.

Gradformel: $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$

Monome: Ein Polynom $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, heißt Monom.

(Bem.: Werden in Lin. Algebra-Teil Polynome als formale Ausdrücke, nicht als Funktionen definieren.)

Rationale Funktionen: Sind p, q Polynome, $q \neq 0$, so ist $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{p(x)}{q(x)}$ mit $D := \mathbb{R} \setminus \{x;\ q(x) = 0\}$ eine rationale Fkt.

Identitätssatz für Polynome: Haben zwei Polynome vom Grad $\leq n$ in $n+1$ Punkten gleiche Funktionswerte, so sind sie gleich, d.h. ihre Koeffizienten stimmen überein. $\leadsto$ "Koeffizientenvergleich"

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. $f: I \to \mathbb{R}$ heißt gerade, falls $\forall x \in I: f(-x) = f(x)$
" ungerade, " " $f(-x) = -f(x)$

Bem.:
- Konstante Funktionen sind gerade, die Nullfunktion ist gerade und ungerade.
- Polynome von geradem Grad sind gerade, die von ungeradem Grad ungerade.
- f diff'bar & gerade $\Rightarrow$ f' ungerade: $f'(-x) = -f'(x)$, • f diff'bar & ungerade $\Rightarrow$ f' gerade: $f'(-x) = f'(x)$

"Linearfaktor abspalten" $\to$
- Ist a eine Nst. des Polynoms f, so gilt $f(x) = (x-a)g(x)$ mit einem Polynom g.
- Ein Polynom vom Grad n kann also höchstens n Nst. haben.
- Über $\mathbb{R}$ gilt: Jedes Polynom lässt sich als Produkt von höchstens quadratischen Faktoren (d.h. Polynome vom Grad ≤ 2) schreiben.

<u>Bem.:</u> • Über $\mathbb{C}$ gilt der Fundamentalsatz der Algebra: ($\rightsquigarrow$ Nützlichkeit von $\mathbb{C}$...)
Jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten zerfällt vollständig in Linearfaktoren, d.h. ist $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $a_i \in \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad n (über $\mathbb{C}$), so ex. $\beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{C}$, $e_1, \dots, e_r \in \mathbb{N}$ mit ($\sum e_i = n$)

$$f(x) = \prod_{j=1}^{r} (x - \beta_j)^{e_r} \text{ für alle } x \in \mathbb{C}.$$

• Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ zusammenhängend mit $x \in D \Rightarrow -x \in D$ für alle $x \in D$, und $f: D \to \mathbb{C}$ eine Fkt. Dann läßt sich f auf eindeutige Art als Summe einer geraden Fkt. g und einer ungeraden Fkt. u schreiben: $f = g + u$, nämlich $g(x) := \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ und $u(x) := \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.
[In der Sprechweise der Lin. Algebra: Der VR der Funktionen $f: D \to \mathbb{C}$ ist die direkte Summe der UVRe der geraden und der ungeraden Fktn.]
Diese Zerlegung ist wichtig bei der komplexen exp-Fkt.

Die Exponentialfunktion im Komplexen

<u>Die</u> Exponentialfunktion $\exp\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wird (meist) durch die in ganz $\mathbb{C}$ konvergente Reihe $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ definiert.

Eigenschaften von exp, die auch zur Def. von exp dienen können:
• exp ist die eind. bestimmte, auf ganz $\mathbb{C}$ diff'bare Fkt. mit $\exp' = \exp$, $\exp(0) = 1$. [$\rightsquigarrow$ exp ist also ∞ oft diff'bar!]

• Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt die Funktionalglg. $\boxed{\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)}$.
[Diese Glg. charakterisiert die allg. Exponentialfktn. $x \mapsto a^x$. Durch die Festlegung $\exp(1) := e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ wird exp def.]
<u>Bew.:</u> Die Glieder des Cauchyprodukts der beiden Reihen $\sum \frac{x^n}{n!}$ und $\sum \frac{y^n}{n!}$ sind

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^n y^{n-k} = \frac{1}{n!} (x+y)^n,$$

also die Glieder der Reihe $\sum \frac{(x+y)^n}{n!}$. □

Weitere Eigenschaften:

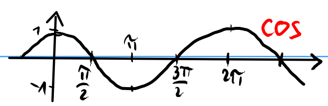
- Mit $e := \exp(1)$ ($\approx 2{,}71828182845\ldots$, heißt Eulersche Zahl) gilt:
  $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ für alle $x\in\mathbb{R}$, $1+x \le e^x$ für alle $x\in\mathbb{R}$, $e^x \le \frac{1}{1-x}$ für $x<1$.
- $\exp: \mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0}$ ist bijektiv, streng monoton wachsend und (streng) konvex.
  Insb. ist $e^x > 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Weiter $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.
- Für alle $n\in\mathbb{N}$ ist $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty$, $\lim_{x\to 0}|x|^n e^x = 0$,
  d.h. Exponentielles Wachstum ist stärker als polynomiales.

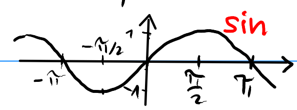
Trigonometrische Funktionen: sin, cos

Def.: sin, cos ist die eind. bestimmte ungerade bzw. gerade Fkt. $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$
mit $\exp(ix) = \cos(x) + i\cdot\sin(x)$, d.h. $\sin(x) := \frac{1}{2i}(\exp(ix)-\exp(-ix))$,
damit sin reell für $x\in\mathbb{R}$
$\cos(x) := \frac{1}{2}(\exp(ix)+\exp(-ix))$.

Eigenschaften:

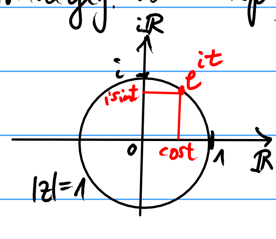
- $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$, $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$ (ungerade/gerade Monome!)
- $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\cos' x = -\sin x$, $\sin' x = \cos x$ [da $\exp' = \exp$] $\rightsquigarrow$ sin, cos ∞ oft diff'bar
- sin, cos: $\mathbb{R}\to[0,1]$ periodisch mit der kleinsten positiven Periode 2π
  (π wird def. als Hälfte dieser kleinsten Periodenlänge >0),
  d.h. $\forall x\in\mathbb{R}$: $\sin(x+2\pi) = \sin x$, $\cos(x+2\pi) = \cos x$.
- Andere mögliche Def. von π: $\frac{\pi}{2} := \min\{x>0;\ \cos x = 0\}$ (kleinste pos. Nst. von $\cos: \mathbb{R}\to[0,1]$)
- Funktionsverlauf:





$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$, d.h. sin um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschieben gibt cos

- Nullstellen: des sin: $\{k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$, des cos: $\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$
- Extremstellen des $\left\{\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}$ sind die Nullstellen des $\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}$ wegen $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$,
  dazwischen sind die Funktionen streng monoton wachsend/fallend, vgl. Skizze
- Additionstheoreme: $\sin(x+y) = \cos x\sin y + \sin x\cos y$, $\quad\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ [$y=-x$]
  $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$; und Varianten...
  [herleitbar aus Funktionalgl. von exp] $\quad$ [$\rightsquigarrow \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}$]
- Geometrische Deutung von sin/cos im Einheitskreis:
  [$\rightsquigarrow$ Polarkoordinaten: $z\in\mathbb{C} \rightsquigarrow z = r\cdot e^{i\varphi}$]



Durchläuft t das IV $[0,2\pi]$, so durchläuft $e^{it} = \cos t + i\sin t$ die Einheitskreislinie $\{z\in\mathbb{C};\ |z|=1\}$ in $\mathbb{C}$.

Die reelle! Logarithmusfunktion

Def.: $\log$ bzw. $\ln: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist def. als die Umkehrfkt. von $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$,
d.h. durch $\ln(\exp(x)) = x$ alle $x \in \mathbb{R}$.
[und $\exp(\ln y) = y$, alle $y \in \mathbb{R}_{>0}$]

Eigenschaften und Rechenregeln: • $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\ln(1-x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ für $|x|<1$

- $\ln$ ist streng monoton wachsend, unbeschränkt in $]0,1[$ und in $]1,\infty[$.
- Es gilt die Funktionalglg.: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ für alle $x,y>0$.
  [Wegen der Funktionalglg. für exp: $\exp(\ln x + \ln y) = \exp(\ln x)\cdot\exp(\ln y) = xy = \exp(\ln(xy))$.]
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$, $\lim_{x\to 0+} x^n \ln x = 0$ (Für $x\to\infty$ wächst $\ln x$ (gegen ∞) langsamer als jede Potenz von x.)

Allgemeine Potenzen/Wurzeln

- Def. der allgemeinen Exponentialfkt.: Für $a>0$ setzt man $a^x := \exp(x \ln a)$, $x \in \mathbb{R}$.
  Sie ist für $a>1$ streng monoton wachsend, für $0<a<1$ streng monoton fallend.
  Für negative Basen wird a^x nicht definiert (vgl. 1. Sitzung).
- Mit dieser Setzung sind allgemeine Potenzen a^x für $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $x \in \mathbb{R}$ definiert. Für diese gelten die Potenzgesetze $a^x a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$, $a^x b^x = (ab)^x$ (für negative Basen nicht mehr!)
- Berechnung der Ableitung von $f(x) := a^x = e^{x\ln a}$ mit Kettenregel usw.:
  $f'(x) = (\ln a)\cdot e^{x\ln a} = a^x \cdot \ln a$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Berechnung der Ableitung von $f(x) := x^x = e^{x\ln x}$, $f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$:
  $f'(x) = e^{x\ln x}\cdot\left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1)$.
- Für alle $x,y \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(xy) = (\exp(x))^y$ (rechts: allg. Potenz).
- Sei $k \in \mathbb{N}$, $a>0$. Da $(a^{1/k})^k = a$ hat die Glg. $x^k = a$ die Lösung $x = a^{1/k} > 0$.
  Deswegen def. man $\sqrt[k]{a} := a^{1/k} = \exp\left(\frac{\ln a}{k}\right)$, die k-te Wurzel aus a.
  Die Potenzgesetze spezialisieren sich zu den Wurzelgesetzen:
  $\sqrt[k]{a^l} = (\sqrt[k]{a})^l$, $\sqrt[l]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[k\cdot l]{a}$, $\sqrt[k]{a}\cdot\sqrt[k]{b} = \sqrt[k]{ab}$, $\sqrt[k]{a}\cdot\sqrt[l]{a} = \sqrt[kl]{a^{k+l}}$,
  da $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = \frac{k+l}{kl}$
- $\forall x>0, y \in \mathbb{R}$: $\ln(x^y) = \ln(\exp(y\ln x)) = y\ln x$. [$x^y$: allg. Potenz]
- Def. $\log_a: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ als Umkehrfkt. von $x \mapsto a^x$, dann ist $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$, weil $\frac{\ln(a^x)}{\ln(a)} = \frac{x\ln(a)}{\ln(a)} = x$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

  $\log_a(b)\cdot\log_b(x) = \log_a(x)$
  log-Basisumrechnung