06.11.13

Repetitorium WiSe 2013/14

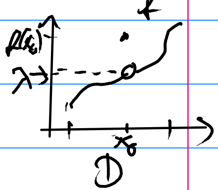
Analysis-Teil:

Stetigkeit/Zwischenwertsatz

Grenzwerte von Funktionen: vgl. früherer Analysis-Teil: x_0 HP von $D \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0: \emptyset \neq D \cap \{x\in\mathbb{R};\ 0 \lneq |x-x_0|<\varepsilon\}$

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt von D und $f: D \to \mathbb{R}$.

Man definiert für $\lambda \in \mathbb{R}$:



$$\lambda = \lim_{x\to x_0} f(x) :\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in D\setminus\{x_0\}: |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-\lambda|<\varepsilon$$

Sowie (falls ∞ bzw. $-\infty$ uneigentl. HP von D ist):

$$\lim_{x\to\infty\ (-\infty)} f(x) = \lambda :\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists R\in\mathbb{R}\ \forall x\in D: x > R\ (<) \Rightarrow |f(x)-\lambda|<\varepsilon$$

Und (falls x_0 HP von D ist):

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\ (-\infty) :\Leftrightarrow \forall R\in\mathbb{R}\ \exists \delta>0\ \forall x\in D\setminus\{x_0\}: |x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x) > R\ (<)$$

[Die Existenz von $\lim_{x\to x_0} f(x)$ hat nichts zu tun mit Existenz/Wert von $f(x_0)$.]

Einseitiger Funktionsgrenzwert: $f: D\to\mathbb{R}$, x_0 ein HP von $D \cap]x_0,\infty[$ ($]-\infty, x_0[$). Dann:

Rechtsseitig: $\lambda = \lim_{x\to x_0+} f(x) :\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D: x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow |f(x)-\lambda|<\varepsilon$

Linksseitig: x_0- ; $x_0-\delta<x<x_0$

Folgenkriterium: $f: D\to\mathbb{R}$, x_0 ein HP von D. Dann:

$$\lambda = \lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lambda \text{ für alle Folgen } x_n\to x_0, \text{ die } x_n\in D\setminus\{x_0\}.$$

Zusammenhang mit Stetigkeit: Sei x_0 HP von D.

Def. s.u.
- $x_0\in D$ und $f: D\to\mathbb{R}$ stetig in $x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- $f: D\to\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig auf $D\setminus\{x_0\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)$ ex.

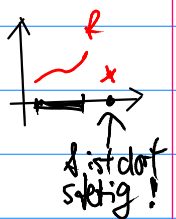
("ε-δ"-)Stetigkeit:

Geg. $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$.

- f heißt stetig in $x_0 \in D$, falls
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$
- f heißt stetig in D, falls f in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

Bem.:

- Def. übertragbar auf $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ bzw. zwischen bel. metrischen Räumen.
- Jede Fkt. ist in den isolierten Punkten ihres Def.bereichs stetig.



Satz: Sei $x_0 \in D$ HP von D. Dann: f stetig in $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Folgenkriterium für Stetigkeit: $f: D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$
$\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D$, $x_n \to x_0$: $f(x_n) \to f(x_0)$.

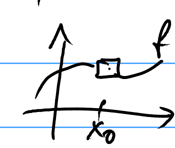
⌈Begründung:

„$\Rightarrow$": Sei $\varepsilon > 0$, dazu δ geg. laut Vor. Wegen $x_n \to x_0$ ex. N mit $|x_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq N$. Dann ist $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ wg. der Stetigkeit. Es folgt $f(x_n) \to f(x_0)$.

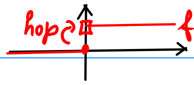
„$\Leftarrow$": Sonst $\exists \varepsilon_0 > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x_\delta \in D \setminus \{x_0\}: |x_\delta - x_0| < \delta$ und $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. Setze $\delta := \frac{1}{n}$, $x_n := x_{1/n}$, dann ist $x_n \to x_0$ aber $f(x_n) \not\to f(x_0)$, ↯. ⌋

Rechenregeln:
- $f, g: D \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $f \pm g$, $\max(f,g)$, $|f|$ stetig
- $f, g: D \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig, $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ in x_0 stetig
- $f: D \to E \subseteq \mathbb{R}$ in x_0 stetig, $g: E \to \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ stetig $\Rightarrow g \circ f$ in x_0 stetig
- Beispiele: $f(x) = |x|$ stetig usw.

Stetige Fortsetzbarkeit:
- Ist x_0 ein HP von $D \subseteq \mathbb{R}$, so heißt $f: D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig fortsetzbar, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ex.
- Die durch $f(x_0) := \lim_{x \to x_0} f(x)$ fortgesetzte Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist dann stetig.

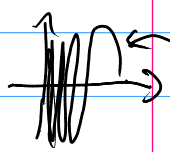


- Sei I Intervall, $x_0 \in I$ innerer Punkt, $f: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$.
x_0 heißt Sprungstelle von f, wenn $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ex. und verschieden (dann f unstetig in x_0, etwa $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \to \lim_{x \to 0} f(x)$ ex. nicht)



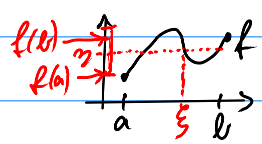
Bem.: • Monotone Funktionen (d.h. $f: D \to \mathbb{R}$ mit $x<y \Rightarrow f(x) \overset{\geq}{\leq} f(y)$) haben höchstens Sprungstellen als Unstetigkeitsstellen, und zwar höchst. abzählbar viele

• $f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ ist unstetig in jedem $x \in \mathbb{R}$



• $f(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ unstetig in 0, $f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ stetig in 0
⌈Folgenkrit.: $x_n \to 0 \Rightarrow f(x_n) = \underbrace{x_n}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin \frac{1}{x_n}}_{\text{beschr.}} \to 0$⌋

Zwischenwertsatz: Sei $I := [a,b]$ Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, $\eta \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann ex. $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \eta$.



Andere Formulierung des ZWS: Ist I ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist $f(I)$ ein Intervall.
Kurz: Stetige Bilder von Intervallen sind Intervalle.

Korollar des ZWS: Jedes Polynom ungeraden Grades hat (mind.) eine Nullstelle.

⌈Bew. des ZWS: Sei OE $f(a) > 0 = \eta > f(b)$, setze $M := \{y \in [a,b];\ f(x) > 0 \text{ für alle } x \in [a,y]\}$.
Sei $\xi := \sup M$. • Falls $\xi \in M$, folgt $f(\xi) > 0 \overset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} f$ in ε-Umg. von ξ noch >0 $\Rightarrow \xi + \frac{\varepsilon}{2} \in M$, ↯ zu $\xi = \sup M$. • Also: $a < \xi < b$ und $\exists\, x_n \in M: x_n \to \xi$, da $\xi = \sup M$. Alle $f(x_n) > 0$, da $x_n \in M$, und da f in ξ stetig: $\underbrace{f(x_n)}_{>0} \to f(\xi)$, also $f(\xi) \geq 0$. Aber $\xi \notin M$.
$\Rightarrow f(\xi) = 0$.⌋

Satz vom Maximum [Minimum]: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ kompakt (d.h. abgeschlossen und beschränkt, z.B. ein abg. beschr. Intervall) und $f: D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ex. $x_{min} \in D$, $x_{max} \in D$ mit: $\forall x \in D: f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$,
Kurz: Stetige Funktionen nehmen auf kompakten Mengen ihr Max/Min an.
[Folgt aus: Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt.]

Satz zur Stetigkeit der Umkehrfkt.: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig + streng monoton (dann also umkehrbar). Dann ist $f^{-1}: f(I) \to I$ stetig.
• Ist $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und bijektiv, so ist $f^{-1}: f(I) \to I$ auch stetig.
[bij. + stetig auf IV ⇒ monoton]

Kann man weglassen

Weitere Stetigkeitsbegriffe:

- $f: D \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig / dehnungsbeschränkt auf D, falls $\exists L \in \mathbb{R}\ \forall x, y \in D: \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$

  [f auf IV diff'bar, dann: Lipschitz-stetig $\Leftrightarrow$ Ableitung f' dort beschränkt]

- $f: D \to \mathbb{R}$ heißt Hölder-stetig auf D, falls $\exists L \in \mathbb{R}\ \exists \alpha > 0\ \forall x, y \in D: \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|^\alpha$

  [• Hölder-stetig $\Rightarrow$ stetig, • Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ Hölder-stetig]

  [Lipschitz-stetige Fktn. mit $L < 1$ heißen Kontraktionen]

- $f: D \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig auf D, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\ \forall y \in D: |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

  [vgl. mit: $\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in D\ \exists \delta > 0$ " " "
  was bedeutet: "f in jedem Punkt x stetig", ist nicht dasselbe!]

[• glm. stetig $\Rightarrow$ stetig, • Stetige Funktionen auf kompakten Mengen sind gleichmäßig stetig.
• Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ Glm. Stetigkeit]

Bsp.: $f(x) = \sqrt{x}$ ist in $[0,1]$ Hölderstetig $(L=1, \alpha = \frac{1}{2})$, nicht Lipschitz-stetig

Bew.: • $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{x-y}$, denn $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{xy} + y \leq x - y$, (OE $y \leq x$)
da $2y \leq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \sqrt{y} \leq \sqrt{x}$.

• Aber: $\nexists L$ mit $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L \cdot |x-y|$,
denn $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{x-y} \leq L$ gilt nicht für x, y nahe 0