Repetitorium WiSe 2013/14

Lineare Algebra-Teil:

Körper- und Gruppenaxiome: vgl. Teil 1

Def. Ring: $(R,+,\cdot)$ heißt Ring, falls $(R,+)$ eine abelsche Gruppe ist, das Assoziativgesetz für $\cdot$ und die beiden Distributivgesetze $\forall x,y,z \in R$: $x(y+z) = xy + xz$ und $(x+y)z = xz + yz$ gelten.
Hat $(R,+,\cdot)$ bzgl. $\cdot$ ein neutr. El., heißt R Ring mit Eins(element).
Ist $\cdot$ kommutativ, heißt R kommutativer Ring.

Def. Vektorraum: Geg. ein Körper K. "Skalare"
Eine Menge V mit einer Verknüpfung $+$ und einer Abbildung
$\cdot : K \times V \to V$, $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ "Skalarmultiplikation"
heißt K-Vektorraum,
falls gilt: $(V,+)$ ist abelsche Gruppe,
und $\forall \alpha,\beta \in K \ \forall x,y \in V$: $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$, $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$,
$\alpha(\beta x) = (\alpha \cdot \beta) x$, $1 \cdot x = x$.
Mult. in K — die $1 \in K$

Die Elemente eines Vektorraums heißen Vektoren.

Teilmengen von Vektorräumen sind interessant, wenn sie selbst wieder (Unter-)struktur haben mit der Struktur des umgebenden VRs:

- Eine Teilmenge $U \subseteq V$ eines VRs V heißt UVR, falls U bzgl. $+,\cdot$ selbst wieder VR ist.
- Eine Teilmenge $U \subseteq V$ eines VRs V über K ist ein Untervektorraum von V, falls gilt: $0 \in U$, $\forall x,y \in U: x+y \in U$, $\forall \alpha \in K \ \forall x \in U: \alpha x \in U$
  damit $U \neq \emptyset$

  (Abgeschlossenheit des UVRs bzgl. $+$ und Skalarmult. $\cdot$).
- Ist U ein UVR des VRs V und $a \in V$, so heißt die Vektormenge
  $a + U := \{a + u \mid u \in U\}$ affiner Unterraum.
  (Ist nur für $a = 0$ wieder ein VR!)

Lineare Unabhängigkeit: Vektoren $v_1, \dots, v_m$ eines K-VRs V heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ in $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ hat.

Lineare Unabhängigkeit von Vektormengen:
Eine Teilmenge S eines VRs V heißt linear unabhängig, wenn je endlich viele Vektoren aus S linear unabhängig sind.

Nicht linear unabhängige Vektoren bzw. Vektormengen heißen linear abhängig.

Bsp.: im $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^2$ sind $\binom{1}{0}, \binom{0}{1}$ lin. unabh., aber $\binom{2}{4}, \binom{3}{6}$ lin. abh.
weil $3 \cdot \binom{2}{4} - 2 \cdot \binom{3}{6} = 0$.
[die Glg. $\lambda_1 \binom{2}{4} + \lambda_2 \binom{3}{6} = \binom{0}{0}$ hat die Lösung $(\lambda_1, \lambda_2) = (3, -2) \neq (0, 0)$]

Linearkombinationen / Lineare Hülle:
Eine Linearkombination der Vektoren $v_1, \dots, v_m \in V$ ist ein Vektor $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in V$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$.

Die Lineare Hülle einer Teilmenge S eines K-VRs V ist die Menge aller Linearkombinationen von jeweils endlich vielen Vektoren aus V, also $L(S) := \{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \mid v_i \in S, \lambda_i \in K, m \in \mathbb{N} \}$,
$L(\emptyset) := \{0\}$.

- $L(S)$ ist UVR von V
- Eine Menge $S \subseteq V$ heißt Erzeugendensystem des UVRs U von V, falls $U = L(S)$ gilt.
- Eine Menge $S \subseteq V$ heißt Basis des UVRs U von V, falls $U = L(S)$ und S linear unabhängig ist.

- $S \subseteq V$ heißt Basis von V, falls $V = L(S)$ und S lin. unabh. ist.
- Hat ein VR eine Basis endlicher Länge, so heißt er endlich dimensional.

Bsp. ∞-dimensionaler VR: Polynomring $K[X]$ als K-VR

Wichtige Sätze über Vektorräume:

1. Jeder Vektorraum besitzt eine Basis. [$\Leftrightarrow$ Auswahlaxiom]
2. Alle Basen eines Vektorraumes sind gleichmächtig.
3. Basisergänzungssatz: In jedem VR läßt sich jede linear unabh. Menge zu einer Basis ergänzen.
4. Austauschsatz von Steinitz:
   Ist B eine Basis des VRs V und $S \subseteq V$ linear unabh. Menge, so gibt es eine Teilmenge $T \subseteq B$ derart, dass $(B \setminus T) \cup S$ eine Basis ist. [Tauschen Elemente von B gegen Elemente von S aus]

- Aus 4. folgt 2.: Sind B, S Basen, ist $(B\setminus T_1) \cup S$ Basis $\Rightarrow \#S \leq \#B$ und $(S \setminus T_2) \cup B$ Basis $\Rightarrow \#B \leq \#S$
- Aus 1.+4. folgt 3.: Nimm irgendeine Basis B (wg. 1.) und tausche Teilmenge T davon aus durch die linear unabh. Menge (mit 4.).
- Wegen 2. ist die Kardinalität einer Basis von V eindeutig bestimmt. Wir nennen diese die Dimension von V. In Zeichen: $\dim V$. Diese ist wegen 2. also wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Basis. Schreiben auch $\dim_K V$ für $\dim V$.
- Untervektorräume sind auch VRe, haben also auch eine Dimension.
- Ist $a+U$ ein affiner UR, setzt man $\dim(a+U) := \dim U$.
- Affine URe des $\mathbb{R}^n$ der Dimension 1 heißen Geraden im $\mathbb{R}^n$,
  " " " 2 " Ebenen im $\mathbb{R}^n$,
  " " " $n-1$ " Hyperebenen im $\mathbb{R}^n$.
- Haben $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$, da die n Einheitsvektoren $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden [klar].
- Wichtig ist folgendes Lemma für UVRe:

(*) Wird ein UVR U von m Vektoren erzeugt, so ist jede Teilmenge T von U mit $\#T > m$ linear abhängig. (klar)

(vgl. Beweis des Satzes auf Seite -5-)

• Sind U_1, U_2 UVRe von V, so auch $U_1 \cap U_2$ und die Summe $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2;\ u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2\}$ $(= L(U_1 \cup U_2))$

• Nicht $U_1 \cup U_2$! Bsp.: $V = \mathbb{R}^2$, $U_1 = \{\binom{x}{0};\ x \in \mathbb{R}\}$, $U_2 = \{\binom{0}{y};\ y \in \mathbb{R}\}$
$\rightsquigarrow U_1 \cup U_2$ ist Achsenkreuz, kein VR!

• $L(A \cup B) = L(A) + L(B)$ ist UVR ($A, B \subseteq V$ bel.)

• Die Summe $A+B := \{a+b;\ a \in A, b \in B\}$ beliebiger Teilmengen A, B von V muss kein UVR sein, Bsp.: $\{a\} + \{b\} = \{a+b\}$, wenn $a+b \neq 0$

Dimensionsformel für UVRe:

Seien U_1, U_2 UVRe des VRs V. Dann gilt:

$$\boxed{\dim(U_1+U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)}$$

Beweis: OE alle Dimensionen endlich, sei $m_1 = \dim U_1$, $m_2 = \dim U_2$.
Sei $\{v_1, \dots, v_k\}$ Basis von $U_1 \cap U_2$ (ev. $k = 0 \Leftrightarrow U_1 \cap U_2 = \{0\}$),
ergänze zu Basis $\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_{m_1}\}$ von U_1
und Basis $\{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_{m_2}\}$ von U_2.
Dann: $U_1 + U_2 = L(v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_{m_1}, w_{k+1}, \dots, w_{m_2})$,
d.h. $\dim(U_1+U_2) \le m_1 + (m_2 - k)$.
Hier "$=$" statt "$\le$", weil die Vektoren $v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_{m_1}, w_{k+1}, \dots, w_{m_2}$ l.u.

$\ulcorner \sum \lambda_i v_i + \sum \mu_j u_j + \sum \nu_\ell w_\ell = 0 \Rightarrow v := \sum \lambda_i v_i + \sum \mu_j u_j = -\sum \nu_\ell w_\ell \in U_1 \cap U_2$
$\Rightarrow v = \sum \alpha_i v_i \Rightarrow 0 = v - v = \sum (\alpha_i - \lambda_i) v_i - \sum \mu_j u_j \Rightarrow$ alle $\lambda_i = \alpha_i$, alle $\mu_j = 0$
$\Rightarrow \sum \lambda_i v_i + \sum \nu_\ell w_\ell = 0 \Rightarrow$ alle $\lambda_i = 0$, alle $\nu_\ell = 0 \lrcorner$ $\square$

Direkte Summe von UVRen:

• Sind U_1, U_2 UVRe von V mit $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, so heißt $U_1 + U_2$ direkt. Schreiben dann: $U_1 \oplus U_2 := U_1 + U_2$

• Ist $V = U_1 \oplus U_2$, dann ist $v = u_1 + u_2$ eindeutig: $u_1 + u_2 = u_1' + u_2' \Rightarrow u_1 - u_1' = u_2' - u_1 \in U_1 \cap U_2 = \{0\} \Rightarrow u_1 = u_1'$ und $u_2 = u_2'$

• Sind $U_1, \dots, U_k$ ($k \geq 2$) UVRe von V mit $\forall i: U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{0\}$, so heißt $U_1 + \dots + U_k$ direkt, schreiben dann: $U_1 \oplus \dots \oplus U_k = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i := U_1 + \dots + U_k$.

• Spezialfall der Dimensionsformel für $\oplus$: $\dim U_1 \oplus U_2 = \dim U_1 + \dim U_2$.

Bem.: $V_1,\dots,V_m$ K-VRe $\Rightarrow V_1\times\dots\times V_m := \{(v_1,\dots,v_m) \mid v_i\in V_i\}$ heißt direktes Produkt, auch wieder K-VR mit komponentenweise $+,\cdot$

Satz, der "Basis" charakterisiert:

Sei V ein K-VR, $\emptyset \neq B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

(1) B Basis von V, (2) B ist minimales Erzeugendensystem von V,

(3) B ist maximale lin. unabh. Teilmenge von V,

(4) Jeder Vektor $v\in V$ ist Lin. Komb. von p.w.v. Vektoren aus B, und jede derartige Lin. Komb. ist eindeutig.

Bew.: (1)⇒(2): B nicht minimal $\Rightarrow \exists A \subsetneqq B : L(A) = V$, $\not\exists A \neq \emptyset$. $\Rightarrow \exists v\in B\setminus A$: v ist Linkomb. von Vektoren aus $A \Rightarrow B$ lin. abh. ↯. } vgl. (*)

(2)⇒(3): • B nicht lin. unabh. $\Rightarrow \exists x\in B : L(B) = L(B\setminus\{x\}) \Rightarrow B$ nicht minimal ↯.

• B nicht maximal $\Rightarrow \exists A \supsetneqq B$, A lin. unabh. $\Rightarrow \exists v\in A\setminus B$: v keine Lin. Komb. von Vektoren aus B ↯.

(3)⇒(4): • $V \neq L(B) \Rightarrow \exists v\in V\setminus L(B) \Rightarrow B\cup\{v\} \supsetneqq B$, $B\cup\{v\}$ lin. unabh. ↯

• Eindeutigkeit der Lin. Komb. wegen Lin. Unabh. der Vektoren in B

(4)⇒(1): B erzeugt V, und B lin. unabh.: Sind $v_i\in B$ mit $\sum \lambda_i v_i = 0 = \sum 0\cdot v_i$ $\Rightarrow$ alle $\lambda_i = 0$ wegen Eindeutigkeit der Linkomb. □

Zwei Fälle von "Arten" von VRen:

endl.-dim. VRe ← **1. Fall:** in V gibt es ein endliches Erzeugendensystem A.

„Basis-auswahl-Satz" → Dann gibt es eine Teilmenge $B\subseteq A$, die Basis ist ⇝ 1. auf Seite -3-

⌜Ist A minimal, fertig wegen Satz. Sonst ist echte Teilmenge $A_1 \subseteq A$ ein Erzeugendensystem. Nach spätestens $\# A$ Schritten wird minimales Erz-system gefunden.⌟

unendl.-dim. VRe ← **2. Fall:** Sonst, dann muß die Existenz einer Basis mit dem Auswahlaxiom hergeleitet werden, in der Form des Zornschen Lemmas.

Beweis des Steinitzschen Austauschsatzes mit

Auswahllemma: Sei $\{v_1,\dots,v_m\}$ Basis von V, $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$ mit $\lambda_k \neq 0$. Dann ist $\{v_1,\dots,v_{k-1}, w, v_{k+1},\dots,v_m\}$ Basis von V.

⌜Zeige hier "erzeugend" und "lin. unabh." direkt. Mehrmals Auswahllemma ⇒ Steinitz.⌟