(1) $T: [1,4] \to [1,4]$, $T(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$ ✓

- $1 \leq T(x) \leq 4$: ✓

- T ist Kontraktion:

$$|T(x) - T(y)| = \frac{1}{2}\left|x - y + \frac{3}{x} - \frac{3}{y}\right|$$

$$= \frac{1}{2}|x-y| \cdot \underbrace{\left|1 - \frac{3}{xy}\right|}_{\leq 1} \leq \frac{1}{2}|x-y| \quad ✓$$

$\rightsquigarrow \theta = \frac{1}{2}$

Banach-Fixpkt.-Satz
$\Rightarrow$ $\exists$ Fixpunkt a mit $T(a) = a$,

d.h. $a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{3}{a}\right) \Leftrightarrow 2a^2 = a^2 + 3 \Leftrightarrow a^2 = 3$
$\Leftrightarrow a = \pm\sqrt{3}$

$\rightsquigarrow a = \sqrt{3}$

---

(2) z.B.: Kreis im $\mathbb{R}^2$: $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

parametrisiert:

$f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $\leftarrow f_1(t) = \cos t$, $\leftarrow f_2(t) = \sin t$

$\rightsquigarrow$ Kreis im $\mathbb{R}^2$: $K = \{f(t) \mid t \in [0, 2\pi]\}$

Hier: $f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

(3) Bogenlängenformel: $L = \int_a^b \|f'(t)\| dt$ für $f: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ st. db.

Halbkreis: $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow L = \int_0^\pi \left\| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\| dt$

$$= \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = \pi.$$

Auch möglich: $x^2+y^2=1$ $\rightsquigarrow$ implizit auflösbar für $y>0$

$$y = g(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$\rightsquigarrow$ Halbkreis: $f_0 : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $f_0(t) = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ $f_0'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow L = \int_{-1}^{1} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ g'(t) \end{pmatrix} \right\| dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}}\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1}{1-t^2}}\, dt \underset{\uparrow}{=} \arcsin(t)\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{\pi}}$$

<u>Bem.:</u> $\arcsin' t = \sqrt{\frac{1}{1-t^2}}$:

$$f(x) = \sin x \rightsquigarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \checkmark$$

---

(4) <u>Kettenregel:</u>

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\quad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad \rightsquigarrow \quad g \circ f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \cdot A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ $\quad B \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ $\quad \rightsquigarrow D(g\circ f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \cdot A$

$\rightsquigarrow f'\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A$ $\quad \rightsquigarrow g'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B$

Kettenregel: $D(g\circ f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{Dg\left(f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)}_{B} \cdot \underbrace{Df\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{A} = B \cdot A$

anderes Bsp.: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ yz \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot y$$

$\rightsquigarrow Df\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x & 0 & 0\\ 0 & z & y\end{pmatrix}, \quad Dg\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (1, -1)$

$$D(g\circ f)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = Dg\left(f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)\cdot Df\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (1\ \ -1)\cdot\begin{pmatrix}2x & 0 & 0\\ 0 & z & y\end{pmatrix}$$
$$= (2x\ \ -z\ \ -y).$$

---

(5) Taylorformel: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \sin x\cdot\cos y\cdot e^z$

Herleitung des 2. Taylorpolynoms in $a = (0,0,0)$:

$$\operatorname{grad} f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = e^z\begin{pmatrix}\cos x\cos y\\ -\sin x\sin y\\ \sin x\cos y\end{pmatrix}$$

$$T_0\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = f(a) = 0$$

$$T_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = T_0(x) + \langle \underbrace{\operatorname{grad} f(0)}_{=(1,0,0)}, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\rangle$$
$$= 0 + x_1 = x_1$$

$$H_f(0) = e^z\begin{pmatrix}-\sin x\cos y & -\cos x\sin y & \cos x\cos y\\ -\cos x\sin y & -\sin x\cos y & -\sin x\sin y\\ \cos x\cos y & -\sin x\sin y & \sin x\cos y\end{pmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$T_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1 + \frac{1}{2}(x_1,x_2,x_3)\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1 + \frac{1}{2}\cdot(x_1,x_2,x_3)\cdot\begin{pmatrix}x_3\\0\\x_1\end{pmatrix}$$
$$= x_1 + x_1x_3$$