Notizen:

(1) Das charakteristische Polynom einer Matrix/Endos $A \in K^{n\times n}$

$$\chi_A(X) = \det(A - X\cdot I_n) \in K[X] \qquad I_n = (\delta_{ij})$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11}-X & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-X & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ a_{n1} & \cdots & & & a_{nn}-X \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, (a_{\pi(1),1} - X\cdot\delta_{\pi(1),1})\cdots(a_{\pi(n),n} - X\delta_{\pi(n),n})$$

$$= (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n a_{ii}\right)}_{=\mathrm{Spur}(A)} X^{n-1} + \ldots + \det(A)$$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \chi_A(X) = X^2 - 9X + \underbrace{11}_{2\cdot 7 - 1\cdot 3}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \chi_A(X) = \det\begin{pmatrix} 1-X & 2 & 3 \\ 4 & 5-X & 6 \\ 7 & 8 & 9-X \end{pmatrix} = -X^3 + 15X^2 + \ldots X + \det(A)$

(2) Diagonalisierbarkeitskriterium: $f \in \mathrm{End}_K(V)$

f diag'bar $\Leftrightarrow$ $\chi_f(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{r_1}\cdots(X-\lambda_s)^{r_s}$ $\quad \lambda_i =$ EW von f

und alle $\mathrm{rg}(f - \lambda_i\cdot \mathrm{id}_V) = n - r_i$

Bem.: alle $\mathrm{rg}(f-\lambda_i\cdot \mathrm{id}_V) = n - r_i \Rightarrow r_i = n - \mathrm{rg}(f-\lambda_i \mathrm{id}_V)$

$\overset{\text{Rangsatz}}{\Leftrightarrow}$ $\underbrace{\dim \underbrace{\ker(f-\lambda_i \mathrm{id}_V)}_{\text{Eigenraum zu } \lambda_i}}_{\text{geometrische Vielfachheit von } \lambda_i} = r_i$, $\quad r_i =$ algebraische Vielfachheit

(3) Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, ist A diag'bar?

$\chi_A(X) = X^2 - 4 + 5$ hat keine reellen Nst.! $\rightsquigarrow$ ist nicht diag'bar über $\mathbb{R}$!

$= (X-(2+i))\cdot(X-(2-i))$

über $\mathbb{C}$: ja, A ist diag'bar, $A \sim \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}$

(4) Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ EW $= 1, 2$

$\chi_A(X) = (2-X)^{2}(1-X)^1$

Weiter: $A - \overset{EW}{2}\cdot I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg}(A - 2\cdot I_3) = 2$

$\Rightarrow$ geometrische Vielf. vom EW 2 ist $3-2 = 1 \neq 2 =$ alg. Vielf.

$\Rightarrow A$ nicht diag'bar

(5) Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \chi_A = (1-X)^1(2-X)^2$

Nun: • $A - 2\cdot I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$ hat Rang 1

$\Rightarrow$ geom. Vielf. $= 3 - 1 = 2$ ✓

$=$ alg. Vielf. bei $\lambda = 2$ ✓

• $A - 1\cdot I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$ hat Rang 2

$\Rightarrow$ geom. Vielf. $= 3 - 2 = 1$ ✓

$=$ alg. Vielf. bei $\lambda = 1$ ✓

$\Rightarrow A$ ist diag'bar, $A \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: D$, d.h. $\exists$ Matrix S mit $D = S^{-1}AS$

Weiter bestimme S: Spalten von S sind EV von A,
also die Lsgn. von $(A-2I_n)x=0 \Leftrightarrow L=\left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$
und $(A-1\cdot I_n)x=0 \Leftrightarrow L=\left\langle \begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix} \right\rangle$

Somit: $S=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&0&-1\\0&1&3\end{pmatrix}$, damit gilt: $D=S^{-1}\cdot A\cdot S$

(6) <u>Bsp.:</u> $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&0\end{pmatrix}$, Berechne A^n mittels EW-Theorie, und $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = ?$

$$\chi_A=\left(\tfrac{1}{2}-X\right)(-X)-\tfrac{1}{2}=(X-1)\cdot\left(X+\tfrac{1}{2}\right),\quad E_1=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle,\quad E_{1/2}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\Rightarrow A\sim\begin{pmatrix}1&0\\0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=:D,\quad A=SDS^{-1},\quad S=\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}\rightsquigarrow S^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$A^2=SD\underbrace{S^{-1}S}DS^{-1}=SD^2S^{-1},\quad A^n=S\underbrace{D^n}S^{-1}$$

$$D^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n=SD^nS^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix}-2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\ldots=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}+\frac{(-1)^n}{2^n\cdot 3} & \frac{1}{3}-\frac{(-1)^n}{2^n\cdot 3}\\ \frac{2}{3}+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}\cdot 3} & \frac{1}{3}-\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 3}\end{pmatrix}\xrightarrow{n\to\infty}\underline{\underline{\begin{pmatrix}2/3&1/3\\2/3&1/3\end{pmatrix}}}$$

(7) Def. Minimalpolynom eines Endos $f \in \mathrm{End}_K(V)$: ($\dim V = n$)
das normierte Polynom kleinsten Grades mit $\mu_f(f) = 0$.

⌈ ex., denn $\underbrace{f^0, f^1, f^2 = f \circ f, \dots, f^{n^2}}_{\text{sind linear abhängig,}} \in \underbrace{\mathrm{End}_K(V)}_{\text{hat Dimension } n^2}$

d.h. $\sum_{i=0}^{n} a_i f^i = 0$ mit nicht alle $a_i = 0$,

d.h. es gibt Polynome P mit $P(f) = 0$

denn $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ ist so eins,

also ex. auch ein solches vom

kleinsten Grad & normiert ⇝ das ist das Mipo! ⌋

(8) Betr. $I = \{P \in K[X] \mid P(f) = 0\}$, d.h. $I \neq \emptyset$,

ist ein Ideal in $K[X]$,

d.h. • $P, Q \in I \Rightarrow P - Q \in I$

• $P \in I$ und $Q \in K[X] \Rightarrow P \cdot Q \in I$

• $K[X]$ ist Hauptidealbereich,

d.h. jedes Ideal ist Hauptideal, d.h. $I = (\mu_f) = \{P \cdot \mu_f \mid P \in K[X]\}$

Also: alle El. in I sind Vielfache von μ_f

(9) Cayley-Hamilton: $\chi_f(f) = \underset{\text{0-Endo}}{0}$ bzw. $\chi_A(A) = \underset{\text{0-Matrix}}{0}$, d.h. $\chi_f \in I$

$\overset{(8)}{\Rightarrow} \mu_f \mid \chi_f \Rightarrow$ jede Nst. von μ_f ist Nst. von χ_f, also EW

Weiter ist auch jede Nst. von χ_f ist auch Nst. von μ_f:

$0 = \underbrace{\mu_f(f)}_{=0}(v) = \mu_f(\lambda) \cdot v \Rightarrow \mu_f(\lambda) = 0$

EV zum EW λ von f, d.h. $f(v) = \lambda v$ und $f^i(v) = \lambda^i v$

(10) **Bsp.:** $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \chi_A = (1-X)^1 (2-X)^2$

$\rightsquigarrow \mu_A = (1-X)\cdot(2-X)^1$

Zur JNF (über $\mathbb{C}$):

Haben: $\chi_f(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{r_1} \cdots (X-\lambda_s)^{r_s}$

und $\mu_f(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{t_1} \cdots (X-\lambda_s)^{t_s}$ mit $t_i \leq r_i$

da $\mu_f \mid \chi_f$ wg. C.H.

JNF:

- Haben s viele Jordan-Blöcke $A_{\lambda_1}, \dots, A_{\lambda_s}$ zu den $\lambda_1, \dots, \lambda_s$:

$$A_f \sim \begin{pmatrix} \boxed{A_{\lambda_1}} & & & 0 \\ & \boxed{A_{\lambda_2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_{\lambda_s}} \end{pmatrix}$$

- Jeder Jordan-Block A_{λ_i} besteht aus Jordan-Kästchen:

$$A_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} J_{i_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{i_{q_i}} \end{pmatrix} \in K^{r_i \times r_i}, \quad J_{i_k} = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

r_i = alg. Vielf. von λ_i

$= \dim H_{\lambda_i} = \dim \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{t_i}$

t_i = Expon. von $X-\lambda_i$ in μ_f = Länge des längsten Kästchens!

Bsp.: Matrix A mit $\chi_A = (X-2)^{\boxed{5}} (X+5)^{\boxed{2}} (X-1)^{\boxed{2}}$

$\mu_A = (X-2)^{\boxed{2}} (X+5)^{\boxed{2}} (X-1)^2$

?

Welche JNF sind möglich? $A \sim \begin{pmatrix} A_2 & & 0 \\ & A_{-5} & \\ 0 & & A_1 \end{pmatrix}$

und $\underbrace{A_{-5} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}}_{\in K^{2\times 2}}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 0 & 2 & & & \\ & & 2 & 1 & \\ & & 0 & 2 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix} \in K^{5\times 5} \quad \text{oder} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 0 & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix} \in K^{5\times 5}$$

Also ist

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & & \\ & & -5 & 1 & & & & & \\ & & 0 & -5 & & & & & \\ & & & & 2 & 1 & & & \\ & & & & 0 & 2 & & & \\ & & & & & & 2 & 1 & \\ & & & & & & 0 & 2 & \\ & & & & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

oder

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & & \\ & & -5 & 1 & & & & & \\ & & 0 & -5 & & & & & \\ & & & & 2 & 1 & & & \\ & & & & 0 & 2 & & & \\ & & & & & & 2 & & \\ & & & & & & & 2 & \\ & & & & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

Sind nicht ähnlich, da verschiedene JNF!

Aber $\mu_A = \mu_{A'}$, $\chi_A = \chi_{A'}$