# Notizen (LA-Teil), 15.01.2014

(1) Welche der Abb. $b: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind Bilinearformen, welche davon sind alternierend / symmetrisch / positiv definit?

- $b_1(x,y) = x_1 y_1$
- $b_2(x,y) = 2x_1y_2 + 3x_2y_1$
- $b_3(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2$
- $b_4(x,y) = x_1x_2 + y_1y_2$ keine Bilin.form
- $b_5(x,y) = x_1 - y_1$ "
- $b_6(x,y) = 2x_1y_2 - 2x_2y_1$

$$\left[ b(x,y) = \sum b_{ij} x_i y_j \right]$$

$\rightsquigarrow$ Strukturmatrizen: $M_{I_n}(b_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$M_{I_n}(b_2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{I_n}(b_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{I_n}(b_6) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Symmetrisch: $b_1, b_3$

alternierend: $b_6$

$b_1$ ist positiv semidefinit, aber nicht pos. definit, denn $\det 1 > 0$, $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$b_3$ ist indefinit

Determinantenkriterium / Hurwitzkriterium für pos. Definitheit:

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ pos. def., denn $\det 2 = 2 > 0$

$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0$

A hermitesch $\iff A^T = \bar{A}$

symm. $\iff A^T = A$

(2) Welche Matrizen sind hermitesch:

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2-i & 4+i \\ 2-i & 6 & i \\ 4+i & i & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

hermitesch, nicht symmetrisch — nicht hermitesch aber symmetrisch — symmetrisch, auch hermitesch

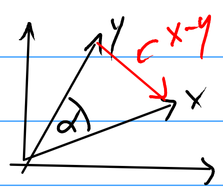
(3) Orthogonalität: $\langle x,y\rangle = 0 \iff x \perp y$

$x,y \in \mathbb{R}^n$

Cauchy-Schwarz: $|\langle x,y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$

Somit: $-1 \le \underbrace{\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}}_{\cos\alpha} \le 1$

$\|x\|^2 = \langle x,x\rangle$




$x \perp y \iff \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x-y\|^2$ [Pythagoras]

$\left( \text{r.S.} = \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle \right)$

$\iff \langle x,y\rangle = 0$

(4) Betr. $\mathbb{R}^4$ mit Standard S.P. $\langle\,,\rangle$, bestimme ONB für UVR $U = L((1,1,0,1),\ (1,-2,0,0),\ (1,0,-1,2))$

$$b_n = v_n - \frac{\langle v_n, b_1\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 - \dots - \frac{\langle v_n, b_{n-1}\rangle}{\langle b_{n-1}, b_{n-1}\rangle} b_{n-1}$$

Schmidt:

$b_1 = (1,1,0,1)$, $\quad b_2 = (1,-2,0,0) - \frac{\langle (1,1,0,1),(1,-2,0,0)\rangle}{\langle (1,1,0,1),(1,1,0,1)\rangle} \cdot (1,1,0,1) = \frac{1}{3}(4,-5,0,1)$

$b_3 = \dots = \frac{1}{7}(-4,-2,-7,6)$

(1) $A \in \mathbb{K}^{m\times m}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$A$ selbstadjungiert $\Leftrightarrow \forall x,y \in \mathbb{R}^m$: $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$

$$\Leftrightarrow \quad '' \quad \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\Big)y_i = \sum_{i=1}^{m} x_i\Big(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j\Big)$$

$$\Leftrightarrow \quad '' \quad \sum_{i,j} a_{ji}x_iy_j = \sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j$$

$$\Leftrightarrow \text{ alle } a_{ij} = a_{ji} \Leftrightarrow A = A^T$$

(2) $A \in \mathbb{K}^{m\times m}$ orthogonal/unitär

$$\Leftrightarrow \overline{A}^T = A^{-1} \Leftrightarrow A\overline{A}^T = I_n$$

$$\Leftrightarrow \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^{-1}y\rangle \quad \text{für alle } x,y$$

$$\underset{y=Az}{\Leftrightarrow} \langle Ax, Az\rangle = \langle x, z\rangle \quad \text{für alle } x,z \quad \rightsquigarrow \text{Abb. } A \text{ erhält}$$

(nicht nur rechte) Winkel

Auch: Abb. $A$ längentreu:

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$$

(3) Alle EW einer selbstadjungierten Abb./Matrix $A \in \mathbb{C}^{m}$ sind reell:

$\lambda$ EW $\rightsquigarrow Ax = \lambda x$

$$\lambda\|x\|^2 = \langle \lambda x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle = \overline{\lambda}\cdot\|x\|^2$$

$$\underset{x\neq 0}{\Rightarrow} \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

(4) Zu $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$ gib $f^*$ an,

wo $f(x,y) = (ix + (1-i)y,\ (1-i)x + iy)$

Haben: $f(x,y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $A = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 1-i & i \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \bar{A}^T = \begin{pmatrix} -i & 1+i \\ 1+i & -i \end{pmatrix} \rightsquigarrow f^*(x,y) = (-ix + (1+i)y,\ (1+i)x - iy)$

(5) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal mit $\det A = 1$

Orientierung? Ist $(b_1, \ldots, b_n)$ Basis,
dann heißt das Vz von $\det(b_1 | \ldots | b_n)$ die Orientierung der Basis

A ist orientierungserhaltend, d.h. A bildet ONB mit bestimmter Orientierung
ab auf ONB mit derselben " für $\det A = 1$

Denn ($x, y \in \mathbb{R}^2$): $\det(Ax, Ay) = \langle (Ax)^\perp, Ay \rangle \overset{\text{muss man nachrechnen}}{=} \langle (\det A) \cdot Ax^\perp, Ay \rangle$

$= (\det A) \cdot \langle Ax^\perp, Ay \rangle = (\det A) \cdot \langle x^\perp, y \rangle$

$= (\det A) \cdot \det(x,y)$

$\rightsquigarrow \underbrace{\text{Vz von } \det(x,y)}_{= \text{Orientierung von } (x,y)}$ bleibt erhalten für $\det A > 0$

(6) Zusammenhang symmetrische ↔ orthogonale Matrizen mit Spektralsatz:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch $\Rightarrow$ ex. orthogonale Matrix P mit $D = P^{-1}AP = P^TAP$,
wo D eine Diagonalmatrix, in deren Diagonale die EWe von A stehen,
und die Spalten von P bilden eine ONB aus EVen von A

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_A(x) = \underbrace{(4-x)}_{\text{EW}:4}\underbrace{(1-x)^2}_{\text{EW}:1}$. Dann: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$,

wo P sich aus den EVen von A durch Schmidt-Orthoverfahren bestimmen lässt
aus den EVen $(-1,1,0), (-1,0,1), (1,1,1) \overset{\text{Schmidt}}{\rightsquigarrow} B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right)$,

ergibt $P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/2\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/2\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$